

**ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ**

**ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ**

**ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ II**

**ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ**

*Υπό Δρ. Μ.Χανιά*

*Αν. Καθηγητή*

**ΕΞΑΜΗΝΟ Β**



**ΚΑΒΑΛΑ 2020**

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

## ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

### 1.1 ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ

Υπάρχει μία δύναμη διαφορετικής φύσης από την βαρυτική γιατί είναι και απωστική. Αποδίδουμε τη δύναμη αυτή σε μια ιδιότητα της ύλης το φορτίο. Το φορτίο όπως και η μάζα είναι ιδιότητα της ύλης. Δεν υπάρχει φορτίο χωρίς μάζα αλλά υπάρχει μάζα χωρίς φορτίο. Οι απωστικές και ελκτικές ηλεκτρικές δυνάμεις αποδίδονται αυθαίρετα σε συνδυασμούς δύο είδη φορτίων το θετικό και το αρνητικό.

Το φορτίο αποτελεί θεμελιώδες χαρακτηριστικό των δομικών σωματιδίων της ύλης. Το ηλεκτρικό φορτίο είναι κβαντισμένο. Η **κβάντωση** του φορτίου περιγράφεται από τη σχέση

$$q=N|e| \quad (1.1).$$

όπου  $N$  ακέραιος.

Δηλαδή είναι ακέραιο πολλαπλάσιο μιας στοιχειώδους ποσότητας φορτίου, του φορτίου του ηλεκτρονίου  $|e|=1.16 \times 10^{-19} \text{C}$ . Το φορτίο του ηλεκτρονίου αυθαίρετα λαμβάνεται σαν αρνητικό. Η μονάδα μέτρησης του ηλεκτρικού φορτίου είναι το  $1\text{C}$ .

Η τιμή του φορτίου είναι αναλλοίωτη μετρούμενη από διάφορα αδρανειακά συστήματα αναφοράς, δηλαδή η τιμή του φορτίου δεν εξαρτάται από το αν το φορτίο κινείται ή ηρεμεί. Το ηλεκτρικό φορτίο υπακούει στην **αρχή της ηλεκτρικής ουδετερότητας**. Σύμφωνα με την αρχή αυτή το ολικό φορτίο ενός ηλεκτρικά απομονωμένου συστήματος παραμένει σταθερό. Με τον όρο ηλεκτρικά απομονωμένο εννοούμε ότι δεν μπορεί σε αυτό να διεισδύσει φορτισμένο σωματίδιο. **Το φορτίο δεν δημιουργείται ούτε καταστρέφεται μόνο μεταφέρεται.**

Το σημειακό φορτίο είναι μια ιδανική κατάσταση όπως είναι το υλικό σημείο στη μηχανική. Στην πραγματικότητα υπάρχουν κατανομές φορτίου Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις

i) γραμμική πυκνότητα φορτίου  $\lambda$

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad (1.2)$$

Όπου  $dq$  είναι το στοιχειώδες φορτίο ενώ το  $dl$  το στοιχειώδες μήκος

ii) επιφανειακή πυκνότητα φορτίου

$$\sigma = \frac{dq}{dA} \quad (1.3)$$

Όπου  $dA$  η στοιχειώδης επιφάνεια.

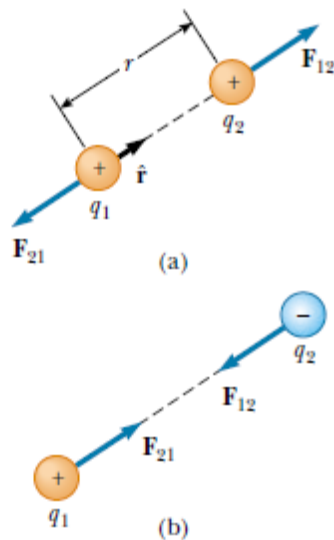
iii) πυκνότητα φορτίων χώρου

$$\rho = \frac{dq}{d\Omega} \quad (1.4)$$

Όπου  $d\Omega$  ο στοιχειώδης όγκος.

## 1.2 ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ

Η ηλεκτρική δύναμη ασκείται ανάμεσα σε δυο φορτία. Είναι απωστική (Σχήμα 1.1 1.1.(α)) εάν είναι ομώνυμα και ελκτική (Σχήμα 1.1 .(b)) εάν τα φορτία είναι ετερόνυμα.



Σχήμα 1.1

Για τις ηλεκτρικές δυνάμεις ισχύει ο νόμος του Coulomb

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad (1.5)$$

Όπου  $\epsilon_0$  μία σταθερά, η ηλεκτρική διαπερατότητα του κενού.

Οι ηλεκτρικές δυνάμεις είναι κεντρικές και επομένως διατηρητικές. **Ισχύει η αρχή της επαλληλίας και η αρχή δράσης αντίδρασης.**

Για τις ηλεκτρικές δυνάμεις ισχύει η αρχή της επαλληλίας

$$\vec{F}_{o\lambda} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N \quad (1.6)$$

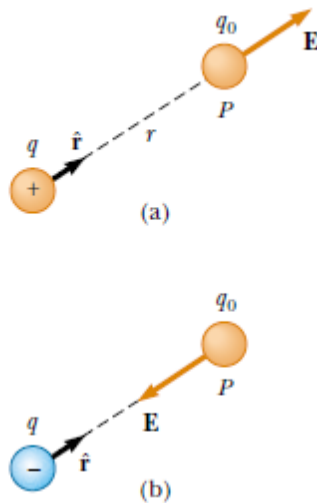
### 1.3 ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΠΕΔΙΟ

Όταν ο χώρος είναι προικισμένος με την ιδιότητα να ασκεί ηλεκτρικές δυνάμεις σε ένα φορτίο που θα βρεθεί μέσα στον χώρο αυτό λέμε ότι είναι ηλεκτρικό πεδίο. Το ηλεκτρικό πεδίο είναι διανυσματικό πεδίο. Το ηλεκτρικό πεδίο περιγράφεται από το μέγεθος **ένταση πεδίου**  $\vec{E}$  το οποίο ορίζεται από τη σχέση

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (1.7),$$

Όπου  $q_0$  δοκιμαστικό ηλεκτρικό φορτίο δηλαδή σημειακό φορτίο μικρού μεγέθους που βρίσκεται σε ένα σημείο του χώρου. Η σχέση έντασης και δύναμης φαίνεται στο σχήμα 1.2. Εάν το ηλεκτρικό πεδίο δημιουργείται από σημειακό φορτίο  $q$  τότε από τις σχέσεις (1.5) και (1.7) παίρνουμε

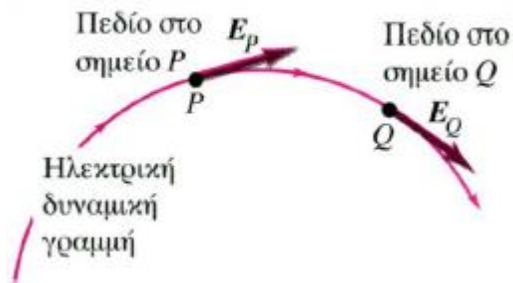
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (1.8)$$



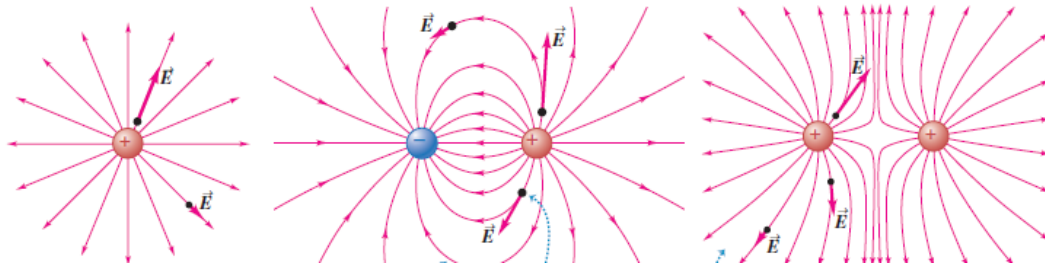
Σχήμα 1.2

Για να έχουμε εποπτική απεικόνιση του ηλεκτρικού πεδίου χρησιμοποιούμε της ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές. Μία ηλεκτρική δυναμική γραμμή είναι μία φανταστική γραμμή σε κάθε σημείο της οποίας το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου είναι εφαπτόμενο (Σχήμα 1.3). Οι ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές μας δείχνουν την κατεύθυνση στη ηλεκτρικού πεδίου ενώ η απόσταση αναμεσά τους μας δείχνει το μέτρο του  $E$ . Ισοδύναμα η πυκνότητα των δυναμικών γραμμών μας δείχνει εάν το ηλεκτρικό πεδίο είναι ασθενές ή ισχυρό σε ένα σημείο του χώρου. Οι δυναμικές

ηλεκτρικές γραμμές δεν τέμνονται διότι το ηλεκτρικό πεδίο έχει μία μοναδική κατεύθυνση. Στο Σχήμα 1.4 παριστάνονται δυναμικές γραμμές για ορισμένες κατανομές φορτίων.



Σχήμα 1.3



Σχήμα 1.4

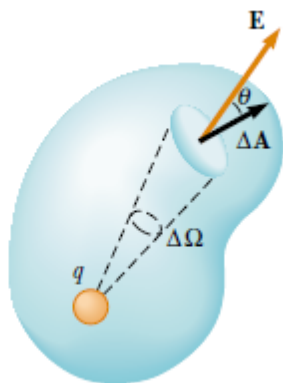
Για τις εντάσεις ισχύει η αρχή της επαλληλίας

$$\vec{E}_{ολ} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N \quad (1.9)$$

## 1.4 Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ GAUSS

Ένας εναλλακτικός τρόπος αντιμετώπισης των ηλεκτρικών πεδίων είναι με την εφαρμογή του νόμου του Gauss. Σύμφωνα με αυτόν η ροή  $\Phi$  της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου μέσα από μία κλειστή επιφάνεια ισούται με το περικλειόμενο φορτίο  $Q_{encl}$  από την επιφάνεια (Σχήμα 1.5),

$$\Phi_E = \oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q_{encl}}{\epsilon_0} \quad (1.10)$$



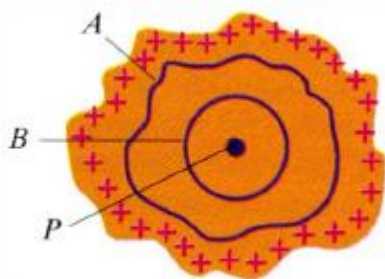
Σχήμα 1.5

### Εφαρμογές του νόμου του Gauss

- I) Σε ένα φορτισμένο αγωγό που είναι σε ηλεκτροστατική ισορροπία τα φορτία κατανέμονται στην επιφάνεια του. Στο εσωτερικό του αγωγού δεν υπάρχει φορτίο.

#### Απόδειξη

Αφού ο αγωγός είναι σε ηλεκτροστατική ισορροπία αναγκαστικά στο εσωτερικό του ισχύει  $E=0$ . Διαφορετικά εάν  $E \neq 0$  τότε τα φορτία θα κινούνται υπό την επίδραση της ηλεκτρικής δύναμης  $F=qE$  και έτσι ο αγωγός δεν θα ήταν σε ηλεκτρική ισορροπία. Τελικά σε κάθε σημείο στο εσωτερικό του αγωγού  $E=0$ . Από τον νόμο του Gauss αφού  $E=0$  και το περικλειόμενο φορτίο θα είναι μηδέν. Έτσι αναγκαστικά το φορτίο κατανέμεται στην επιφάνεια του αγωγού (Σχήμα 1.6).



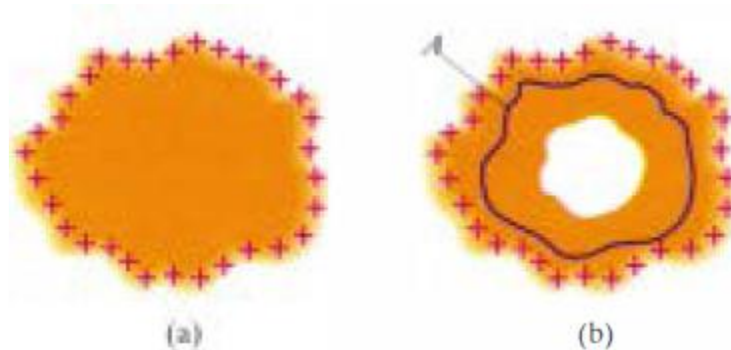
Σχήμα 1.6

- II) Σε ένα αγωγό με κοιλότητα το  $E=0$  μέσα στην κοιλότητα

#### Απόδειξη

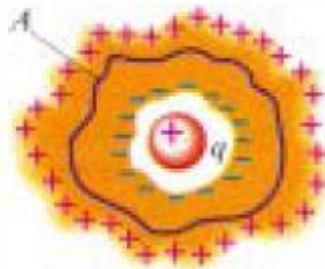
Εάν στην κοιλότητα δεν υπάρχει φορτίο τότε με την βοήθεια μιας επιφάνειας Gauss που περικλείει την κοιλότητα έχουμε  $E=0$  σε κάθε σημείο της γκαουσιανής επιφάνειας.

Οπότε  $Q_{\text{encl}}=0$  που περιλαμβάνει και τυχόν φορτίο στην επιφάνεια της κοιλότητας. Άρα αφού  $Q_{\text{encl}}=0$  δεν υπάρχει φορτίο στην επιφάνεια της κοιλότητας. Αφού και στο εσωτερικό της κοιλότητας δεν υπάρχει φορτίο τότε από το νόμο του Gauss προκύπτει ότι το  $E=0$  στο εσωτερικό της κοιλότητας (Σχήμα 1.7).



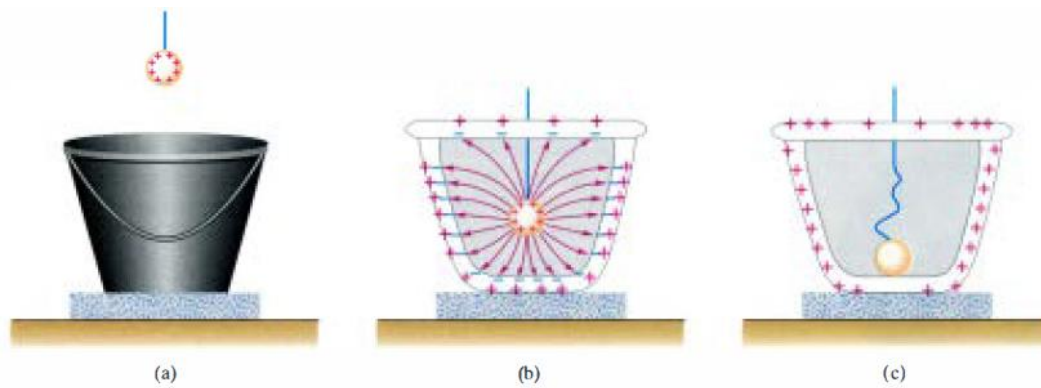
Σχήμα 1.7

Στη συνέχεια τοποθετούμε φορτίο  $q$  στο εσωτερικό της κοιλότητας. Δημιουργούμε όπως πριν μία επιφάνεια Gauss στο εσωτερικό του αγωγού. Επάνω της  $E=0$  άρα και το περικλειόμενο φορτίο από την επιφάνεια θα είναι  $Q_{\text{encl}}=0$ . Για να συμβεί αυτό δημιουργείται ένα ολικό φορτίο  $-q$  στην επιφάνεια της κοιλότητας και σύμφωνα με την αρχή της διατήρησης του φορτίου θα πρέπει να εμφανιστεί ένα φορτίο  $+q$  στην εξωτερική επιφάνεια του αγωγού (Σχήμα 1.8). Εάν ο αγωγός ήταν φορτισμένος με φορτίο  $Q$  τότε το ολικό φορτίο στην επιφάνεια του θα είναι  $Q+q$ .



Σχήμα 1.8

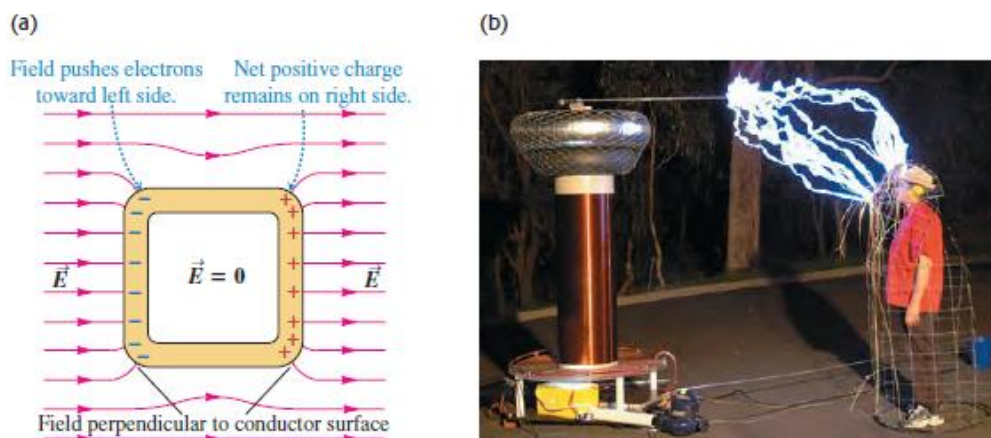
Ερώτηση 1: Γιατί στο Σχήμα 1.9.(c) η αρχικά φορτισμένη σφαίρα εκφορτίζεται;



Σχήμα 1.9

### III) Κλωβός Faraday

Από την στιγμή που στο εσωτερικό ενός αγωγού το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν και ο αγωγός εκτεθεί σε ένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο θα αναπτυχθούν τέτοιοι μηχανισμοί έτσι ώστε στο εσωτερικό του το ηλεκτρικό πεδίο να ισούται με μηδέν. Συγκεκριμένα το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο αναδιατάσσει τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του αγωγού δημιουργώντας ένα αρνητικό φορτίο στην μία επιφάνεια του αγωγού και ένα θετικό φορτίο στην άλλη επιφάνεια του αγωγού. Αυτή η ανακατανομή του φορτίου δημιουργεί ένα πρόσθετο ηλεκτρικό πεδίο έτσι ώστε η επαλληλία ανάμεσα στο εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο και το πρόσθετο ηλεκτρικό πεδίο να δημιουργεί στο εσωτερικό του αγωγού μηδενικό ηλεκτρικό πεδίο (Σχήμα 1.10)



Σχήμα 1.10

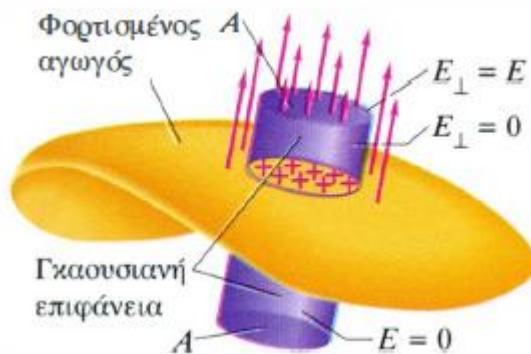
Ερώτηση 2 :Γιατί το ασφαλέστερο σημείο είναι να παραμείνουμε στο εσωτερικό του αυτοκινητού όταν βρεθούμε σε καταιγίδα με κεραυνούς;



#### IV) Σχέση ανάμεσα στην $E$ και την $\sigma$ σε ένα σημείο ακριβώς έξω από την επιφάνεια ενός αγωγού

Το ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνεια ενός αγωγού που βρίσκεται σε ηλεκτροστατική ισορροπία είναι κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού. Αυτό είναι συνέπεια του ότι ο αγωγός βρίσκεται σε ηλεκτροστατική ισορροπία. Εάν το ηλεκτρικό πεδίο δεν ήταν κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού θα μπορούσε να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες μία κάθετη και μία παράλληλη στην επιφάνεια του αγωγού. Η παράλληλη συνιστώσα θα έθετε σε κίνηση τα φορτία (ηλεκτρόνια) του αγωγού και έτσι δεν θα βρισκόταν σε κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας όπως αρχικά υποθέσαμε.

Κατασκευάζουμε μία Γκαουσιανή κυλινδρική επιφάνεια με βάση  $A$  που βρίσκεται στο εσωτερικό του αγωγού και βάση  $A$  που βρίσκεται έξω από τον αγωγό (Σχήμα 1.11).



Σχήμα 1.11

Από τον ορισμό της επιφανειακής πυκνότητας φορτίου (σχέση 1.3) προκύπτει ότι το φορτίο στην επιφάνεια του αγωγού θα είναι

$$Q = \sigma A \quad (1.11)$$

Εφαρμόζοντας τον νόμο του Gauss για τον κύλινδρο έχουμε

$$\Phi = \overrightarrow{E_{\kappa}^{\xi}} \vec{A} + \overrightarrow{E_{\kappa}^{\sigma}} \vec{A} + \overrightarrow{E_{\kappa}^{\text{παραπ}}} \vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.12)$$

Επειδή στο εσωτερικό του αγωγού το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδενικό και επειδή το διάνυσμα της παράπλευρης επιφάνειας είναι κάθετο στο  $E_{\kappa}$  ο τρίτος όρος είναι μηδενικός οπότε καταλήγουμε στην σχέση

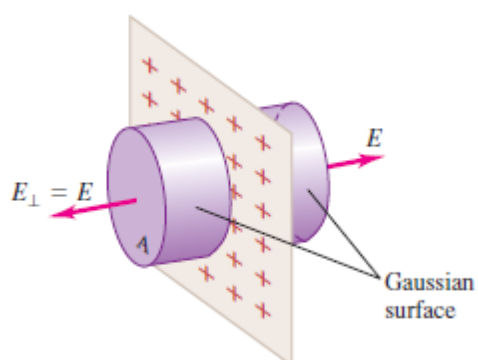
$$E_{\kappa} A = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.13)$$

Επειδή  $E = E_{\kappa}$  και με βάση την σχέση (1.9) τελικά προκύπτει

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (1.14)$$

V) Ένταση ηλεκτρικού πεδίου  $E$  ενός ομοιόμορφα φορτισμένου επίπεδου αγωγού απείρων διαστάσεων

Στο Σχήμα 1.12 παριστάνεται ένας αγωγός σε μορφή λεπτού φύλλου άπειρης επιφάνειας.



Σχήμα 1.12

Το ηλεκτρικό πεδίο όπως έχουμε αναφέρει θα είναι κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού. Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss για την Γκαουσιανή επιφάνεια του σχήματος 1.12

$$\Phi = EA + EA = \frac{Q_{encl}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad (1.15)$$

Από την 1.15 προκύπτει

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (1.16)$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

### ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ – ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ

Το έργο που παράγει η ηλεκτρική δύναμη για να μετακινήσει σημειακό φορτίο  $q'$  από το σημείο Α στο σημείο Β δίνεται από τη σχέση

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B F dr = \int_A^B \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} dr = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{dr}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right] \quad (2.1)$$

Ισχύει

$$W_{A \rightarrow B} = -\Delta U = -(U_B - U_A) \quad (2.2).$$

Από (1) και (2)

$$U_A - U_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r_A} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r_B} \quad (2.3)$$

Από την (2.3) λαμβάνουμε

$$U_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r_A} \quad (2.4)$$

$$U_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r_B} \quad (2.5)$$

Εάν η δυναμική ενέργεια στο άπειρο  $r_B \rightarrow \infty$  είναι μηδέν τότε η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια σε μία θέση  $r$  από ένα σημείο αναφοράς δίνεται από τη σχέση

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r} \quad (2.6)$$

ως προς την δυναμική ενέργεια στο άπειρο που την θεωρήσαμε μηδενική.

Εάν ορίσουμε ένα νέο μέγεθος, τον λόγο της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας προς το φορτίο, ένα ανηγμένο δηλαδή μέγεθος ως προς το φορτίο, το μέγεθος αυτό ορίζεται σαν το **ηλεκτρικό δυναμικό V**.

$$V = \frac{\Delta U}{q'} \quad (2.7)$$

Μονάδα μέτρησης είναι το 1 Volt (V),

$$1V = 1J/C$$

Επειδή μόνο οι διαφορές της δυναμικής ενέργειας έχουν σημασία έπεται ότι μόνο οι διαφορές δυναμικού έχουν φυσική σημασία. Για αυτό μιλάμε για διαφορά δυναμικού ή τάση. Πολλές φορές γίνεται η διάκριση ανάμεσα στην **μεταβολή του ηλεκτρικού δυναμικού**  $\Delta V = V_b - V_a$  κατά την κίνηση ενός φορτίου από ένα αρχικό σημείο a σε ένα τελικό σημείο b και την **διαφορά δυναμικού**  $V_{ab} = V_a - V_b$ . Το τελευταίο ονομάζεται και **το δυναμικό του a ως προς το b**. Το σημείο στο οποίο το ηλεκτρικό δυναμικό μηδενίζεται λαμβάνεται αυθαίρετα. Το σημείο αυτό συνήθως είναι ένα σημείο απομακρυσμένο στο άπειρο ή η επιφάνεια της Γης (**Γείωση**).

Έχουμε

$$W_{A \rightarrow B} = -\Delta U = q' \int_A^B E dr \rightarrow -\frac{\Delta U}{q'} = \int_A^B E dr \rightarrow \Delta V = -\int_A^B E dr \quad (2.8)$$

Η (2.8) μπορεί να γραφεί ως,

$$\int_A^B dV = -\int_A^B E dr \rightarrow dV = -E dr \quad (2.9)$$

και τελικά

$$\mathbf{E} = -\frac{dV}{dr} \hat{r} \quad (2.10)$$

Από τη σχέση 2.8 όταν  $V_A > V_B$  ή  $V_A - V_B > 0$  ή  $-(V_A - V_B) < 0$  ή  $(V_B - V_A) < 0$  ή  $-\Delta V > 0$  και ισodύναμα  $-\Delta U > 0$  οπότε  $W_{A \rightarrow B} > 0$  δηλαδή το ηλεκτρικό πεδίο παράγει θετικό έργο. Ένα θετικό φορτίο τείνει να πέσει από περιοχή υψηλού δυναμικού σε περιοχή χαμηλού δυναμικού.

Η σχέση (2.10) ισχύει για ακτινικό πεδίο. Στην γενικότερη περίπτωση η σχέση που συνδέει το ηλεκτρικό δυναμικό με την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι η

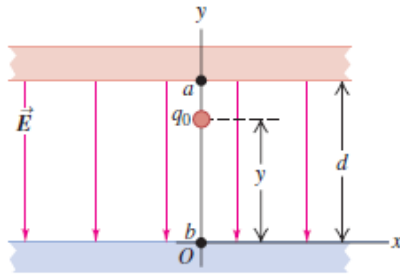
$$\mathbf{E} = -\vec{\nabla}V = -gradV \quad (2.11)$$

$$\text{Όπου } \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \quad (2.12),$$

είναι ο τελεστής κλίση ή grad ή ανάδελτα ή nabla.

**Εφαρμογή 1** Να βρεθεί η διαφορά δυναμικού ανάμεσα σε δύο παράλληλες ομοιόμορφα φορτισμένες με αντίθετο φορτίο μεταλλικές πλάκες .

Η διάταξη φαίνεται στο Σχήμα 2.1



Σχήμα 2.1

Από την σχέση 2.1 ολοκληρώνοντας λαμβάνουμε

$$\int_a^b dV = - \int_a^b \vec{E} d\vec{r} \rightarrow V_b - V_a = - \int_a^b E(-\hat{j})(0 - r_a \hat{j}) \rightarrow V_b - V_a = - \int_a^b E d \quad (2.13)$$

Από την σχέση 2.13 προκύπτει

$$V_{ab} = Ed \text{ ή}$$

$$E = \frac{V_{ab}}{d} \quad (2.14)$$

### **Εφαρμογή 2 Η επιφάνεια ενός αγωγού είναι ισοδυναμική επιφάνεια**

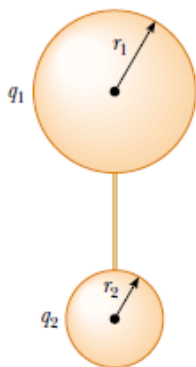
Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι κάθετη στην επιφάνεια του φορτισμένου αγωγού επομένως δεν υπάρχει βαθμίδα δυναμικού. Ισχύει  $dV=0$ .

**Εφαρμογή 3 Κάθε σημείο ενός αγωγού σε ηλεκτροστατική ισορροπία έχει το ίδιο δυναμικό με εκείνο της επιφάνειάς του.**

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό ομοιόμορφα φορτισμένου αγωγού είναι μηδέν. Τότε με εφαρμογή της σχέσης 2.10 προκύπτει ότι σε δύο σημεία στην επιφάνεια του αγωγού πρέπει να ισχύει  $dV=0$  δηλαδή  $V_a=V_b$  δηλαδή η επιφάνεια είναι ισοδυναμική. Σαν συνέπεια των ανωτέρω οι **ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές είναι κάθετες στις ισοδυναμικές επιφάνειες.**

## **2.1 Δυναμικό ακίδων – Ηλεκτρική διάσπαση**

Εάν φέρουμε δύο φορτισμένες σφαίρες σε επαφή με την βοήθεια ενός σύρματος (Σχήμα 2.2)



Σχήμα 2.2

τότε αυτές μετά την ανακατανομή φορτίου θα αποκτήσουν κοινό ηλεκτρικό δυναμικό. Έτσι,

$$V = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r_1} q_1 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r_2} q_2 \rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} \quad (2.15)$$

Για τις εντάσεις θα ισχύει,

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 r_1^2} \quad (2.16),$$

Και

$$E_2 = \frac{q_2}{4\pi \epsilon_0 r_2^2} \quad (2.17).$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (2.16) και (2.17) παίρνουμε

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}. \quad (2.18)$$

Από την (2.18) προκύπτει ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι μεγαλύτερη στην σφαίρα με την μεγαλύτερη ακτίνα καμπυλότητας ( $\kappa=1/r$ ), (μικρότερη ακτίνα). Με άλλα λόγια οι αγωγοί με την μεγαλύτερη ακτίνα καμπυλότητας π.χ. ακίδες για το ίδιο δυναμικό έχουν μεγαλύτερη ένταση ηλεκτρικού πεδίου. Επειδή στην επιφάνεια των αγωγών ισχύει η σχέση 1.14 οι αγωγοί με την μεγαλύτερη ακτίνα καμπυλότητας π.χ. ακίδες θα εμφανίζουν μεγαλύτερη πυκνότητα φορτίου από τους αγωγούς με μικρότερη ακτίνα καμπυλότητας. Αυτό το εκμεταλλευόμαστε στην κατασκευή αλεξικέραυνων που καταλήγουν σε ακίδα και το αποφεύγουμε στις κεραίες που πρέπει να καταλήγουν σε μία μικρή σφαίρα.

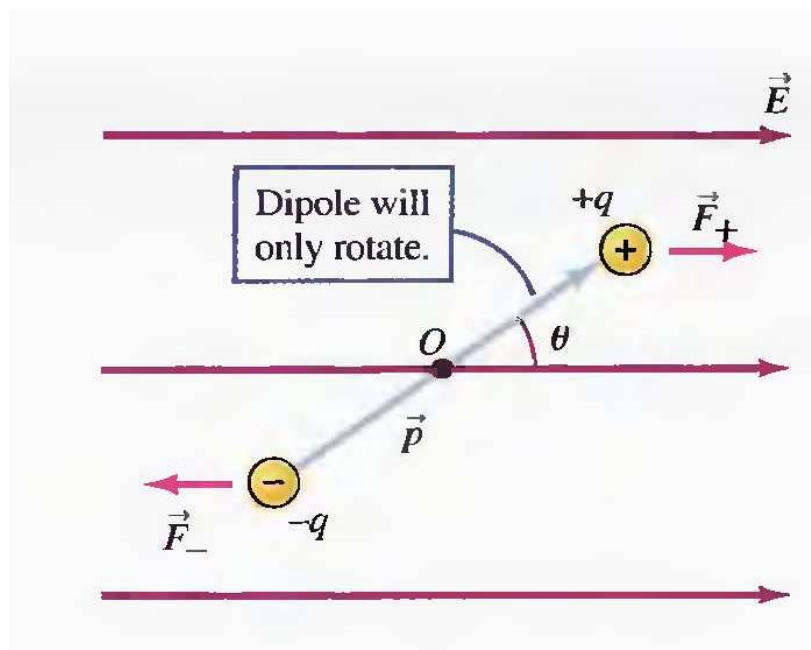
Στην περίπτωση που η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου γίνει πολύ μεγάλη στην άκρη μιας ακίδας τότε δημιουργείται σπινθήρας και το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **εκφόρτιση κορόνας**. Αυτό συμβαίνει γιατί ο αέρας που είναι διηλεκτρικό εάν βρεθεί σε ηλεκτρικό πεδίο μεγαλύτερο από μία χαρακτηριστική τιμή που λέγεται **διηλεκτρική αντοχή** μετατρέπεται από μονωτής σε αγωγό. Έτσι υπό την επίδραση του ηλεκτρικού πεδίου ελευθερώνονται ηλεκτρόνια από τα μόρια του αέρα με αποτέλεσμα

να έχουμε επιταχυνόμενα φορτία που εκπέμπουν ακτινοβολία. Το φαινόμενο κατά το οποίο ένας μονωτής υπό την επίδραση ισχυρού ηλεκτρικού πεδίου μετατρέπεται σε αγωγό ονομάζεται **ηλεκτρική διάσπαση** ή ηλεκτρική κατάρρευση (electricbreakdown). Η τιμή της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου για την οποία υφίσταται ηλεκτρική διάσπαση το διηλεκτρικό ονομάζεται **διηλεκτρική αντοχή** του διηλεκτρικού  $E_b$ .

Ερώτηση 3 Να βρεθεί το μέγιστο ηλεκτρικό δυναμικό που μπορεί να βρεθεί μία μεταλλική σφαίρα ακτίνας 1cm (Δίνεται διηλεκτρική αντοχή του αέρα  $E_b=3 \times 10^6 \text{V m}^{-1}$ )

## 2.2 Ηλεκτρικό δίπολο

Ένα σύστημα δυο ίσων και αντίθετων φορτίων που απέχουν απόσταση  $L$  και είναι στερεωμένα με ένα μονωτικό υλικό χαρακτηρίζεται σαν ηλεκτρικό δίπολο (Σχήμα - 2.3)



Σχήμα 2.3

### 2.2.1 Μηχανική ροπή ηλεκτρικού δίπολου

Εάν θεωρήσουμε ότι το ηλεκτρικό δίπολο βρίσκεται σε ένα ηλεκτρικό πεδίο έντασης  $\vec{E}$  όπως το σχήμα 2.2 τότε στο θετικό φορτίο θα ασκείται δύναμη  $\vec{F}_+$  και στο αρνητικό φορτίο δύναμη  $\vec{F}_-$ . Η κάθε δύναμη θα προκαλεί μηχανική ροπή ως προς άξονα που διέρχεται από το μέσον του διπόλου. Έτσι θα έχουμε για την μηχανική ροπή της δύναμης  $\vec{F}_+$ ,

$$\vec{\tau}_1 = \vec{l}_1 \times \vec{F}_+ = \vec{l}_{1x} \times \vec{F}_+ + \vec{l}_{1y} \times \vec{F}_+ = l_1 \cos\theta \hat{i} \times qE \hat{i} + l_1 \sin\theta \hat{j} \times qE \hat{i} = -l_1 qE \sin\theta \hat{k} = -\frac{L}{2} qE \sin\theta \hat{k} \quad (2.19)$$

Ομοίως για την μηχανική ροπή της δύναμης  $\vec{F}$ .

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_1 &= \vec{l}_2 \times \vec{F}_- = \vec{l}_{2x} \times \vec{F}_- + \vec{l}_{2y} \times \vec{F}_- = -l_2 \cos\theta \hat{i} \times (-qE \hat{i}) + (-l_2 \sin\theta \hat{j}) \times (-qE \hat{j}) = \\ &= -l_1 qE \sin\theta \hat{k} = -\frac{L}{2} qE \sin\theta \hat{k}\end{aligned}\quad (2.20)$$

Οπότε η συνολική μηχανική ροπή θα είναι

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = -qLE \sin\theta \hat{k}\quad (2.21)$$

Εάν ορίσουμε σαν **διπολική ροπή** ηλεκτρικού διπόλου το διανυσματικό μέγεθος

$\vec{p}$ , και το  $\vec{L}$  είναι διάνυσμα με μέτρο  $L$  και κατεύθυνση από το αρνητικό στο θετικό φορτίο τότε η διπολική ροπή δίνεται από τη σχέση

$$\vec{p} = q\vec{L}\quad (2.22)$$

τότε η σχέση (2.21)

είναι το εξωτερικό γινόμενο των  $\vec{p}, E$

έτσι τελικά η **μηχανική ροπή** δίνεται από την

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}\quad (2.23).$$

### 2.2.2 Ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ηλεκτρικού δίπολου

Όταν ένα ηλεκτρικό δίπολο περιστρέφεται υπό την επίδραση ενός εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου το πεδίο παράγει έργο επάνω στο δίπολο. Από αυτό το έργο μπορούμε να βρούμε την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια που έχει το δίπολο ευρισκόμενο μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο.

Το έργο που παράγει το ηλεκτρικό πεδίο πάνω στο δίπολο για να το στρέψει από την γωνία  $\theta_0$  στην  $\theta$  είναι

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} \vec{\tau} d\vec{\theta}\quad (2.24)$$

όμως

$$d\vec{\theta} = d\theta \hat{k}\quad (2.25)$$

Από (2.23), (2.24) και (2.25)

έχουμε

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} -pE \sin\theta d\theta = pE [\cos\theta - \cos\theta_0]\quad (2.26)$$

Ισχύει



$$W = -\Delta U = -(U - U_0) \rightarrow (U - U_0) = -W = -pE[\cos\theta - \cos\theta_0] \quad (2.27)$$

Εάν θεωρήσουμε στην γωνία  $\theta_0 = 90^\circ$  ή  $U_0 = 0$  τότε από την (2.27) έχουμε

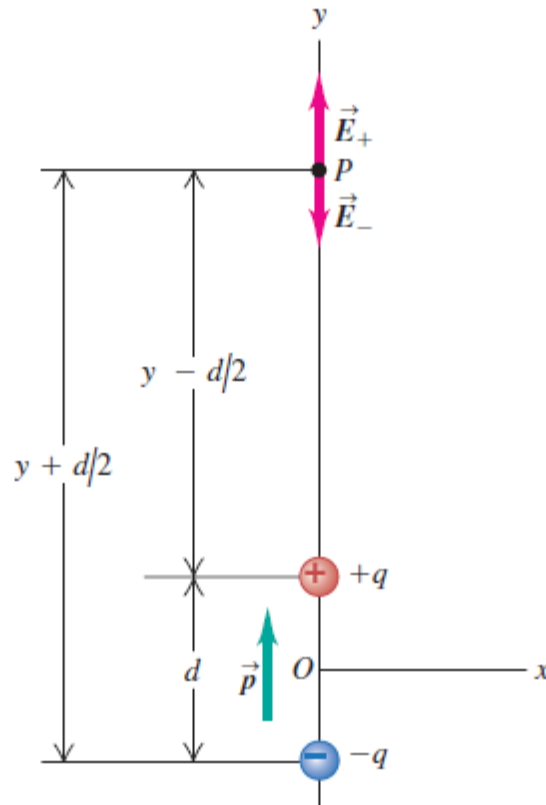
$$U = -pE\cos\theta \quad (2.28)$$

Τελικά η δυναμική ενέργεια του ηλεκτρικού διπόλου όταν βρεθεί μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο  $E$  είναι

$$U = -\vec{p}\vec{E} \quad (2.29)$$

Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί ένα ηλεκτρικό δίπολο σε ένα σημείο  $P$  το οποίο βρίσκεται στον άξονα του διπόλου (Σχήμα 2.3) σε πολύ μεγάλη απόσταση από το μέσο του διπόλου έτσι ώστε η απόσταση αυτή να είναι μεγαλύτερη από την απόσταση των δύο φορτίων που συνιστούν το δίπολο δίνεται από τη σχέση

$$E_y = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 y^3} \quad (2.30)$$



Σχήμα 2.3.

Το σημαντικό είναι ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ελαττώνεται αντιστρόφως ανάλογα του  $y^3$ . Η ίδια εξάρτηση ισχύει για οποιαδήποτε άλλη θέση του σημείου  $P$  αλλά περιγράφεται με πιο περίπλοκη σχέση.

**Άσκηση 2.1**

Το ηλεκτρικό δυναμικό μετρήθηκε και βρέθηκε ότι μπορεί να περιγραφεί από την συνάρτηση  $V(x,y,z)=3xy^2 - 5yx^3 - 2zx^2$ . Να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο με συντεταγμένες (2,3,1) και η δύναμη που θα δεχτεί ένα φορτίο 1μC που θα βρεθεί στη θέση αυτή.

Λύση

Με εφαρμογή της σχέσης (2.12)

$$\mathbf{E} = -[(3y^2 - 15yx^2 - 4zx)\hat{i} + (6xy - 5x^3)\hat{j} + (-2x^3)\hat{k}] \quad (1)$$

Στο σημείο με συντεταγμένες (2,3,1) η (1) γίνεται

$$\mathbf{E}_{(2,3,1)} = 161\hat{i} + 4\hat{j} + 8\hat{k} \quad (2)$$

Και η δύναμη  $\mathbf{F}=q\mathbf{E}$ , είναι

$$\mathbf{F} = 161x10^{-6}\hat{i} + 4x10^{-6}\hat{j} + 8x10^{-6}\hat{k}$$

Με μέτρο

$$F = \sqrt{(161x10^{-6})^2 + (4x10^{-6})^2 + (8x10^{-6})^2} \text{N}$$

**Άσκηση 2.2**

Μια σφαιρική κατανομή φορτίου δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο του οποίου το δυναμικό σε απόσταση  $r$  από το κέντρο της δίνεται από τη σχέση

$$V(r) = A \sin(r) e^{-Br}$$

όπου  $A=0.1\text{N/m}$  και  $B=2\text{cm}$ . Θεωρώντας ότι το ηλεκτρικό πεδίο που προέρχεται από την κατανομή είναι ακτινικό να βρείτε α) Την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο κέντρο της κατανομής β) αυτή η κατανομή φορτίου οφείλεται σε μεταλλικό αγωγό ή σε ένα μονωτή;

Λύση

Με εφαρμογή της σχέσης (2.10)

Έχουμε

$$E = -e^{-Br} [a \cos(r) - b \sin(r)] \quad (1)$$

Για  $r \rightarrow 0$  έχουμε  $E=a$  δηλαδή  $E \neq 0$  άρα η κατανομή φορτίου οφείλεται σε μονωτή.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

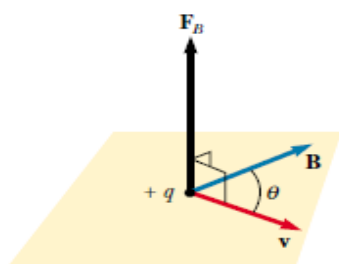
### ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Στην αρχαιότητα παρατηρήθηκε το φαινόμενο κάποια ορυκτά να εμφανίζουν μεταξύ τους ελκτικές και απωστικές δυνάμεις ανάλογα με τον προσανατολισμό τους. Επίσης παρουσίαζαν ελκτικές δυνάμεις στον σίδηρο. Τα ορυκτά αυτά ονομάστηκαν μαγνήτες επειδή βρέθηκαν στην Μαγνησία της Μ. Ασίας και οι δυνάμεις που σχετίζονται με τους μαγνήτες ονομάστηκαν μαγνητικές δυνάμεις.

Επομένως υπάρχει εκτός της βαρυτικής και της ηλεκτρικής δύναμης μία άλλη δύναμη η μαγνητική. Ο χώρος ο οποίος είναι προικισμένος να ασκεί μαγνητικές δυνάμεις ονομάζεται μαγνητικό πεδίο. Όπως παρατηρήθηκε η Γη ασκεί μαγνητικές δυνάμεις σε μαγνητικές βελόνες. Το 1819 ο Hans Cristian Oersted παρατήρησε ότι ρευματοφόρος αγωγός ασκεί μαγνητικές δυνάμεις σε μαγνητική βελόνα και ότι ανάλογες δυνάμεις ασκούνται μεταξύ ρευματοφόρων αγωγών. Συνέπεια των πειραμάτων του Oersted ήταν να συνδεθούν οι μαγνητικές δυνάμεις και το μαγνητικό πεδίο με κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο. Έτσι κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο ευρισκόμενο μέσα σε μαγνητικό πεδίο δέχεται μαγνητική δύναμη. Επίσης κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο δημιουργεί μαγνητικό πεδίο.

#### 3.1 Μαγνητική Δύναμη

Έστω φορτίο  $q$  κινείται σε μαγνητικό πεδίο  $B$  με ταχύτητα  $v$ . Η μαγνητική δύναμη που δέχεται θα είναι (Σχήμα 3.1)



(3.1)

Σχήμα 3.1

με μέτρο

$$F_B = qvB \sin(\theta) \quad (3.2)$$

Εάν η ταχύτητα είναι κάθετη με το διάνυσμα  $B$  τότε η δύναμη παίρνει την μέγιστη τιμή

$$F_B = qvB \quad (3.3)$$

ενώ εάν είναι παράλληλη η δύναμη μηδενίζεται. Από τη σχέση (3.3) προκύπτει για το μαγνητικό πεδίο  $B$ ,

$$B = \frac{F}{qv} \quad (3.4)$$

Μονάδα μαγνητικού πεδίου είναι το 1T (Tesla) που ορίζεται από τη σχέση (3.4)

$1T = 1NC^{-1}m^{-1}s = NA^{-1}m^{-1}$ . Παλαιότερη μονάδα του μαγνητικού πεδίου είναι το 1Gauss. Ισχύει  $1T = 10^4 Gauss$ .

Το γεγονός ότι η μαγνητική δύναμη είναι πάντα κάθετη στη διεύθυνση της κίνησης σημαίνει ότι για τα στατικά μαγνητικά πεδία **το έργο που παράγει η δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι μηδέν**

Εάν ένα φορτίο κινούμενο με ταχύτητα  $v$  και βρίσκεται ταυτόχρονα σε ηλεκτρικό πεδίο έντασης  $E$  και σε μαγνητικό πεδίο  $B$  τότε η συνολική δύναμη που δέχεται είναι

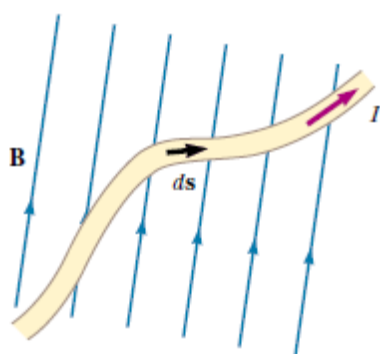
$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_B = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (3.5)$$

Η συνολική δύναμη λέγεται **δύναμη Lorentz**. Έτσι το φορτίο  $q$  δέχεται την ηλεκτρική δύναμη γιατί "είναι" φορτίο και την μαγνητική γιατί κινείται με ταχύτητα ολίσθησης  $v$

Εάν θεωρήσουμε ένα ρευματοφόρο αγωγό στοιχειώδους μήκους  $ds$  που διαρρέεται από ρεύμα έντασης  $I$  και βρίσκεται σε μαγνητικό πεδίο  $B$  τότε η στοιχειώδης μαγνητική δύναμη που δέχεται δίνεται από τη σχέση (Σχήμα 3.2).

$$d\vec{F} = Id\vec{s} \times \vec{B} \quad (3.6)$$

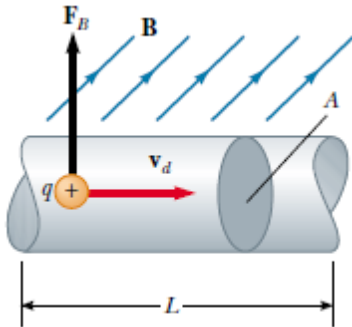
Το μέγεθος  $ds$  λαμβάνεται σαν διάνυσμα μέτρου ίσο με το μήκος του σύρματος και κατεύθυνση την φορά του ρεύματος.



Σχήμα 3.2

Εάν θεωρήσουμε ένα ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό μήκους  $L$  που διαρρέεται από ρεύμα έντασης  $I$  και βρίσκεται σε μαγνητικό πεδίο  $B$  (Σχήμα 3.3). τότε η μαγνητική δύναμη που δέχεται δίνεται από τη ολοκλήρωση της σχέσης (3.6)

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B} \quad (3.7)$$



Σχήμα 3.3

Το μέγεθος  $L$  λαμβάνεται σαν διάνυσμα μέτρου ίσο με το μήκος του σύρματος και κατεύθυνση την φορά του ρεύματος.

### 3.2 Μαγνητική Ροή

Ανάλογα με την ροή του ηλεκτρικού πεδίου μέσα από μία επιφάνεια  $A$  ορίζεται και η αντίστοιχη μαγνητική ροή.

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad (3.8)$$

Μονάδα μαγνητικής ροής είναι το 1W (Weber),

$$1W = 1T1m^2$$

Ο αντίστοιχος νόμος του Gauss για τον μαγνητισμό δίνεται από τη σχέση

$$\Phi_B = \oiint \vec{B} d\vec{A} \quad (3.9)$$

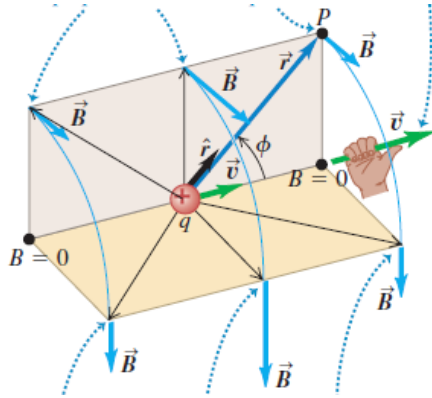
Το δεύτερο μέλος της σχέσης (3.9) είναι μηδέν. Αυτό είναι συνέπεια του ότι στη φύση δεν έχουν ανακαλυφθεί μαγνητικά μονόπολα.

Όπως αναφέρθηκε πριν η αιτία του μαγνητικού πεδίου είναι το κινούμενο φορτίο. Το στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο  $B$  σε ένα σημείο του χώρου  $P$  με διάνυσμα θέσης  $r$ , που δημιουργείται από ένα φορτίο που κινείται με σταθερή ταχύτητα  $v$  (Σχήμα 3.4)

δίνεται από τον νόμο των Biot και Savart

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} \quad (3.10)$$

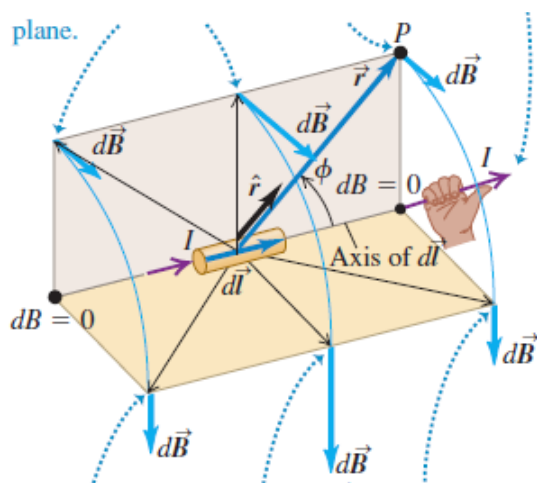
όπου  $\mu_0$  η μαγνητική διαπερατότητα του κενού.



Σχήμα 3.4

Εάν θεωρήσουμε ένα ρευματοφόρο αγώγιμο στοιχειώδες μήκος  $d\vec{l}$  που διαρρέεται από ρεύμα έντασης  $I$  (Σχήμα 3.4) τότε το στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο  $d\vec{B}$  σε ένα σημείο του χώρου  $P$  με διάνυσμα θέσης  $\vec{r}$ , προκύπτει ως εξής.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \hat{r}}{4\pi r^2} \tag{3.11}$$

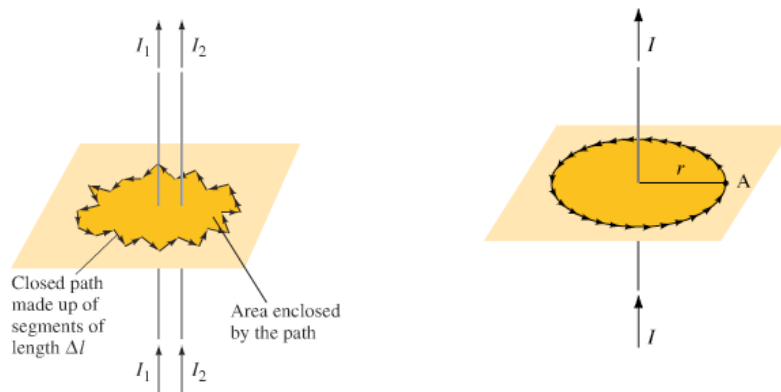


Σχήμα 5.4

### 3.3 Νόμος του Ampere

Επειδή ο νόμος των Biot και Savart είναι δύσχρηστος για τον υπολογισμό των μαγνητικών πεδίων χρησιμοποιούμε αντί αυτού τον νόμο του Ampere (Σχήμα 3.5)

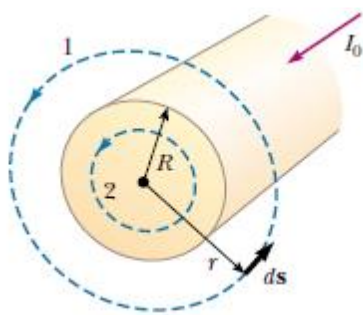
$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I \quad (3.12)$$



Σχήμα 3.5

Ο νόμος του Ampere δηλώνει ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γύρω από μία κλειστή καμπύλη που οριοθετεί μία επιφάνεια είναι ανάλογο της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος που περνάει μέσα από την επιφάνεια που οριοθετείται από την κλειστή καμπύλη.

Παράδειγμα εφαρμογής του νόμου του Ampere είναι ο υπολογισμός του μαγνητικού πεδίου σε απόσταση  $r$  από ρευματοφόρο αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα  $I_0$ . (Σχήμα 3.6)



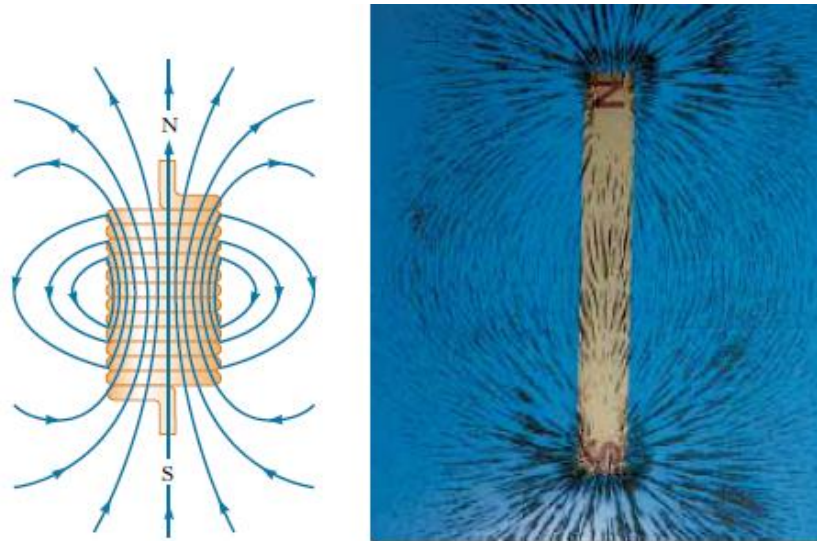
Σχήμα 3.6

$$\oint B ds = B \oint ds = B 2\pi r = \mu_0 I_0 \quad (3.13)$$

Από την (3.1.3) έχουμε

$$B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \quad (3.14)$$

Εάν ένα σύρμα τυλιχθεί για να σχηματίσει σωληνοειδές πηνίο (Σχήμα 3.6)



Σχήμα 3.6

τότε το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του πηνίου που διαρρέεται από ρεύμα  $I$  δίνεται από τη σχέση

$$B = \mu_0 n I \quad (3.15)$$

Όπου  $n$  είναι ο αριθμός των σπειρών ανά μονάδα μήκους.

### Άσκηση 3.1

Δύο φορτία  $q_1$  και  $q_2$  κινούνται κατά την θετική κατεύθυνση  $x$  ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων  $xyz$ , με ταχύτητες  $v_1$  και  $v_2$  αντίστοιχα. Σε μια χρονική στιγμή η στιγμιαία θέση τους είναι τέτοια ώστε να απέχουν μεταξύ τους απόσταση  $d$ .

Να βρεθούν οι μαγνητικές δυνάμεις που ασκούνται ανάμεσα τους.

#### Λύση

Η μαγνητική δύναμη  $F_1$  που θα δεχθεί το φορτίο 1 λόγω του μαγνητικού πεδίου  $B_2$  που δημιουργεί το κινούμενο φορτίο 2 είναι

$$\mathbf{F}_1 = q_1 \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_2 \quad (1)$$

Το μαγνητικό πεδίο  $B_2$  δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_2 v_2 \times \mathbf{j}}{r^2} \quad (2).$$

Από (1) και (2) προκύπτει



$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= q_1 \mathbf{v}_1 \times \left[ \frac{\mu_0 q_2 \mathbf{v}_2 \times \mathbf{j}}{4\pi r^2} \right] = \frac{q_1 q_2 \mu_0}{4\pi r^2} [\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{j})] = \\ &= \frac{q_1 q_2 \mu_0}{4\pi r^2} [\mathbf{v}_1 \mathbf{i} \times (\mathbf{v}_2 \mathbf{i} \times \mathbf{j})] = \frac{\mu_0 q_1 q_2 v_1 v_2}{4\pi r^2} [\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j})] = \\ &= \frac{\mu_0 q_1 q_2 v_1 v_2}{4\pi r^2} (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) = -\frac{\mu_0 q_1 q_2 v_1 v_2}{4\pi r^2} \mathbf{j} \quad (3) \end{aligned}$$

Ομοίως η δύναμη  $\mathbf{F}_2$  που δέχεται το φορτίο  $q_2$  λόγω του μαγνητικού πεδίου λόγω του μαγνητικού πεδίου  $\mathbf{B}_1$  που δημιουργεί το κινούμενο φορτίο 1 είναι

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0 q_1 q_2 v_1 v_2}{4\pi r^2} \mathbf{j} \quad (4)$$

### Άσκηση 3.2

Ένα φορτίο  $q_1$  κινείται κατά την θετική κατεύθυνση  $x$  ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων  $xyz$ , με ταχύτητα  $v_1$ , ενώ ένα άλλο φορτίο  $q_2$  κινείται με ταχύτητα  $v_2$  κατά την αρνητική κατεύθυνση του άξονα  $y$ . Σε μια χρονική στιγμή η στιγμιαία θέση τους είναι τέτοια ώστε να απέχουν μεταξύ τους απόσταση  $d$ .

Να βρεθούν οι μαγνητικές δυνάμεις που ασκούνται ανάμεσα τους.

#### Λύση

Το μαγνητικό πεδίο στην θέση που βρίσκεται το φορτίο  $q_1$  λόγω της κίνησης του φορτίου  $q_2$  είναι

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 q_2 \mathbf{v}_2 \times \mathbf{j}}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 q_2 v_2 (-\mathbf{j}) \times \mathbf{j}}{4\pi r^2} = \mathbf{0} \quad (1),$$

άρα δεν υπάρχει μαγνητική δύναμη στο φορτίο  $q_1$ .

Δηλαδή  $\mathbf{F}_1 = \mathbf{0}$  (2)

Η μαγνητική δύναμη  $\mathbf{F}_2$  που θα δεχθεί το φορτίο  $q_2$  λόγω του μαγνητικού πεδίου  $\mathbf{B}_1$  που δημιουργεί το κινούμενο φορτίο  $q_1$  είναι

$$\mathbf{F}_2 = q_2 \mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_1 \quad (3)$$

Το μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B}_1$  δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 q_1 \mathbf{v}_1 \times (-\mathbf{j})}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 q_1 v_1 [\mathbf{i} \times (-\mathbf{j})]}{4\pi r^2} = -\frac{\mu_0 q_1 v_2}{4\pi r^2} \mathbf{k} \quad (4).$$

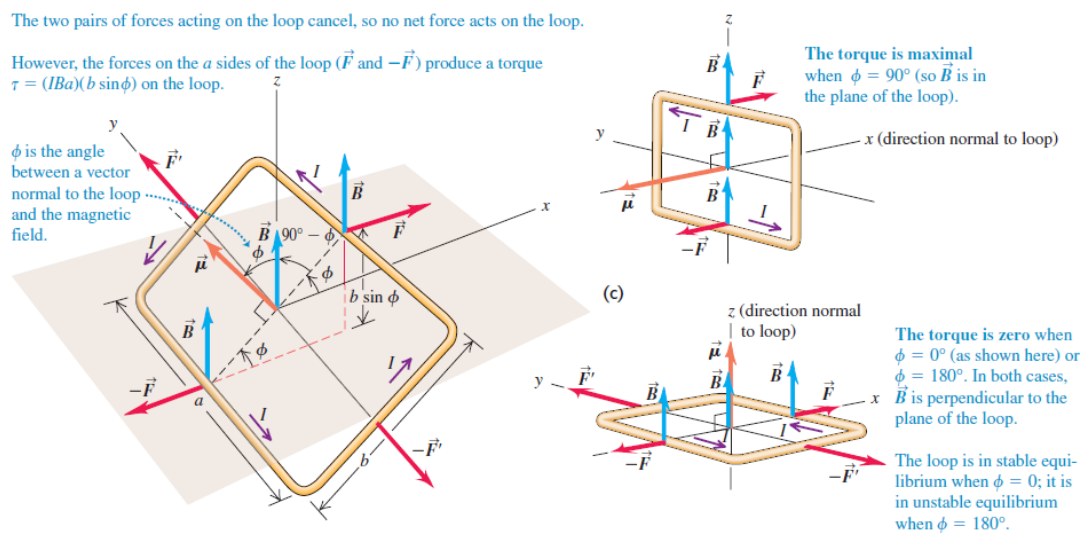
Από (3) και (4),

$$\mathbf{F}_2 = q_2 \mathbf{v}_2 \times \frac{\mu_0 q_1 v_1}{4\pi r^2} (-\mathbf{k}) = \frac{\mu_0 q_1 q_2 v_1 v_2 (-\mathbf{j}) \times (-\mathbf{k})}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 q_1 q_2 v_1 v_2 \mathbf{i}}{4\pi r^2} \quad (5)$$

Όπως προκύπτει από τις σχέσεις (2) και (5) ενώ το φορτίο  $q_2$  δέχεται μαγνητική δύναμη το φορτίο  $q_1$  δεν δέχεται. Φαίνεται να η αρχή δράσης αντίδρασης δηλαδή ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα να παραβιάζεται. Ο τρίτος νόμος στην μηχανική είναι ισοδύναμος με την αρχή διατήρησης της ορμής. Όταν τώρα είναι ταυτόχρονα παρόντα το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο ο συνδυασμός αυτών των πεδίων μεταφέρει ορμή. για τον λόγο αυτό ένα ληφθεί υπόψιν αυτή η ορμή των πεδίων η αρχή διατήρησης της ορμής δεν παραβιάζεται.

### 3.4 Δύναμη και ροπή σε κλειστό βρόχο ρεύματος

Στο σχήμα 3.7 ένας τετραγωνικός βρόχος διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα μέσα σε ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο.



Σχήμα 3.7

Η συνισταμένη των δυνάμεων πάνω στο βρόχο είναι μηδέν

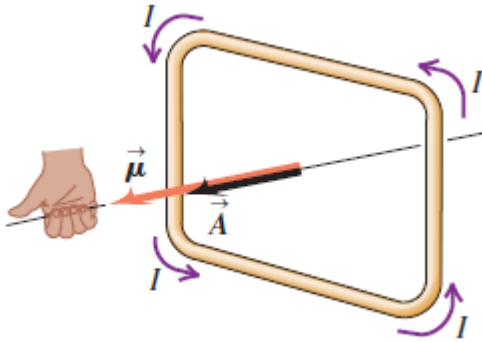
$$\Sigma \vec{F} = 0 \tag{3.16}$$

Αλλά η συνολική μηχανική ροπή δεν είναι μηδέν. Η μηχανική ροπή  $\vec{\tau}$  δίνεται από την σχέση

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \tag{3.17}$$

Όπου  $\mu$  είναι ένα μέγεθος που ονομάζεται **μαγνητική ροπή** ή **μαγνητική διπολική ροπή** του βρόχου και είναι το ισοδύναμο του ηλεκτρικού διπόλου στον μαγνητισμό. Αυτή ορίζεται ως (Σχήμα 3.8)

$$\vec{\mu} = I\vec{A} \quad (3.18)$$



Σχήμα 3.8

Με μέτρο

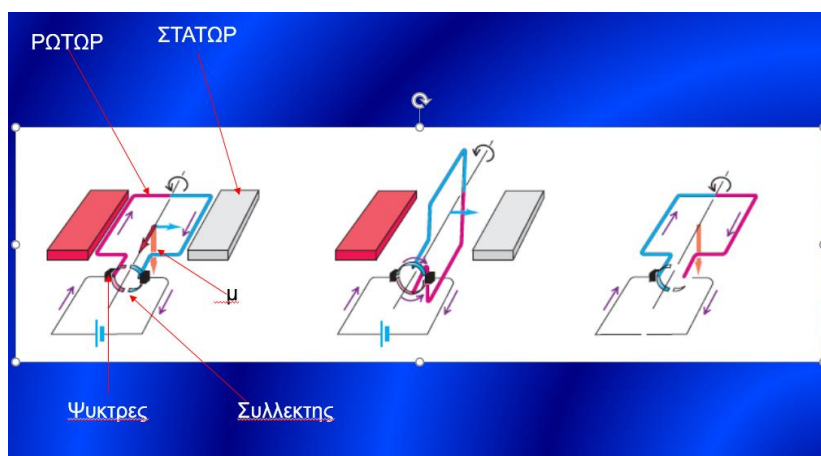
$$\mu = IA \quad (3.19)$$

όπου  $I$  η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον βρόχο και  $A$  η επιφάνεια που ορίζει ο βρόχος.

Το μέτρο της μηχανικής ροπής δίνεται από τη σχέση

$$\tau = IAB\sin\phi \quad (3.20)$$

Εφαρμογή της μαγνητικής ροπής έχουμε στον ηλεκτροκινητήρα συνεχούς ρεύματος. Η λειτουργία του παριστάνεται στο σχήμα 3.9.



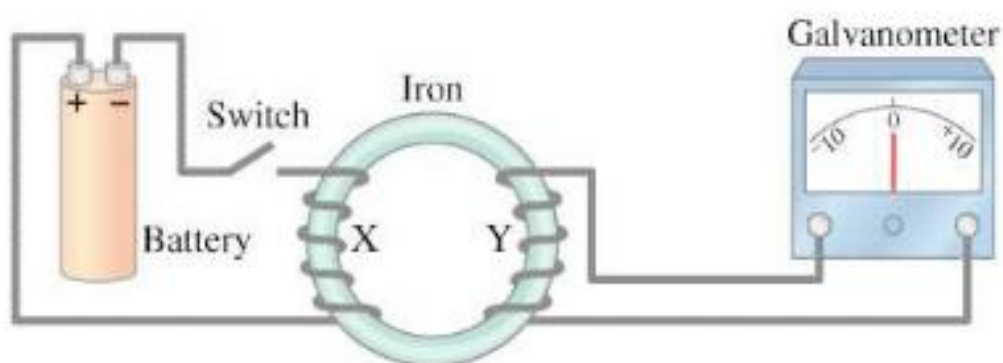
Σχήμα 3.9.

Ένας κλειστός αγωγίμος βρόχος διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα ευρισκόμενος μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Ο κινούμενος βρόχος ονομάζεται ρωτορ. Στον ρωτορα υπάρχουν εγκοπές παράλληλα με την επιφάνεια του στις οποίες είναι στερεωμένοι μονωμένοι χάλκινοι αγωγοί. Αυτοί διαρρέονται από ρεύμα που περνά από δύο ψύκτρες από γραφίτη όταν αυτές κάνουν επαφή με ένα κύλινδρο τον συλλέκτη. Επειδή το ρεύμα είναι σταθερό ο ρωτορας λόγω της μηχανικής ροπής θα βρεθεί στην ενδιάμεση θέση κατακόρυφα και θα ταλαντώνεται γύρω από αυτή την θέση. Όμως όταν τα δύο τμήματα του συλλέκτη έρχονται σε επαφή με των αγωγό δεν υπάρχει διαφορά δυναμικού ανάμεσα στα δύο τμήματα του συλλέκτη, στιγμιαία διακόπτεται το ρεύμα, μηδενίζεται η μηχανική ροπή αλλά λόγω αδράνειας ο ρωτορ συνεχίζει να περιστρέφεται και το ρεύμα αρχίζει πάλι να διαρρέει τον βρόχο έτσι ώστε τελικά βρόχος να περιστρέφεται.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

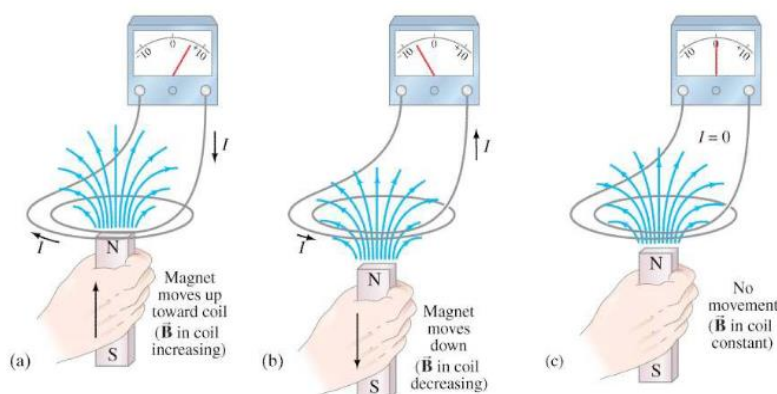
### ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

Το 1830 ο Michael Faraday παρατήρησε η μεταβολή του ηλεκτρικού ρεύματος προκαλεί μεταβολή μαγνητικού πεδίου σε ένα πρωτεύον πηνίο. Αυτή η μεταβολή του μαγνητικού πεδίου και όσο διαρκεί αυτή προκαλεί – επάγει ένα ηλεκτρικό ρεύμα στο δευτερεύον πηνίο (Σχήμα 4.1).



Σχήμα 4.1

Ανάλογα φαινόμενα έχουμε όταν μεταβληθεί η ροή των μαγνητικών γραμμών μέσα από ένα αγωγίμο βρόχο (Σχήμα 4.2).



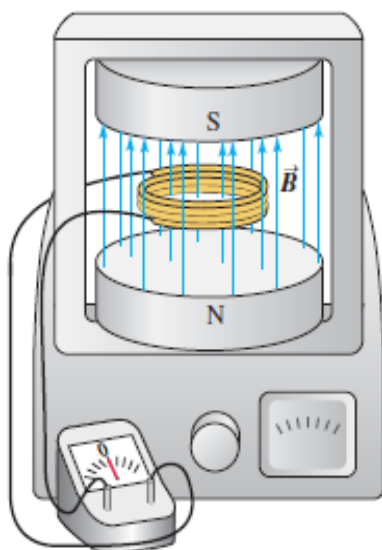
Σχήμα 4.2.

Αυτό το ρεύμα ονομάζεται **επαγόμενο ρεύμα** ή **ρεύμα εξ επαγωγής** και η ΗΕΔ που προκαλεί αυτό το επαγόμενο ρεύμα **επαγόμενη ΗΕΔ** ή **ΗΕΔ εξ επαγωγής**.

#### 4.1 Ο νόμος του Faraday

Στο Σχήμα 4.3 παριστάνεται ένα πηνίο μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο. Επαγόμενο ρεύμα μπορεί να προκληθεί.

1. Από μεταβολή της έντασης του ρεύματος
2. Από μεταβολή του μαγνητικού πεδίου
3. Από αλλαγή του σχήματος του πηνίου
4. Με μετακίνηση του πηνίου μέσα στο μαγνητικό πεδίο
5. Με στροφή του πηνίου μέσα στο μαγνητικό πεδίο
6. Με πρόσθεση ή αφαίρεση σπειρών στο πηνίο.
7. Το επαγόμενο ρεύμα δεν εξαρτάται από το υλικό του πηνίου πάρα μόνο από το σχήμα του και το μαγνητικό πεδίο.



Σχήμα 4.3

Για να ερμηνεύσουμε τα πειραματικά αυτά δεδομένα πρέπει να δεχτούμε ότι το επαγόμενο ρεύμα δημιουργείται μόνο όταν έχουμε μεταβολή της μαγνητικής ροής που διέρχεται μέσα από το πηνίο. Η μαγνητική ροή  $\Phi_B$  μέσα από την επιφάνεια  $A$  δίνεται από την σχέση

$$\Phi_B = BA \cos \varphi \quad (4.1)$$

Όπου  $\varphi$  είναι η γωνία ανάμεσα στο διάνυσμα του μαγνητικού πεδίου και το διάνυσμα της επιφάνειας.

Μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{dB}{dt} A \cos\varphi + B \frac{dA}{dt} \cos\varphi + BA \frac{d\cos\varphi}{dt}$$

Μεταβολή Μαγνητικού Πεδίου      Μεταβολή Επιφάνειας      Στροφή Επιφάνειας

Τα ανωτέρω αποτελέσματα ο Faraday τα συνόψισε στην σχέση

$$E = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (4.2).$$

Η σχέση 4.2 αποτελεί τον νόμο του Faraday για την ηλεκτρομαγνητική επαγωγή. Ο νόμος επαγωγής του Faraday ορίζει ότι

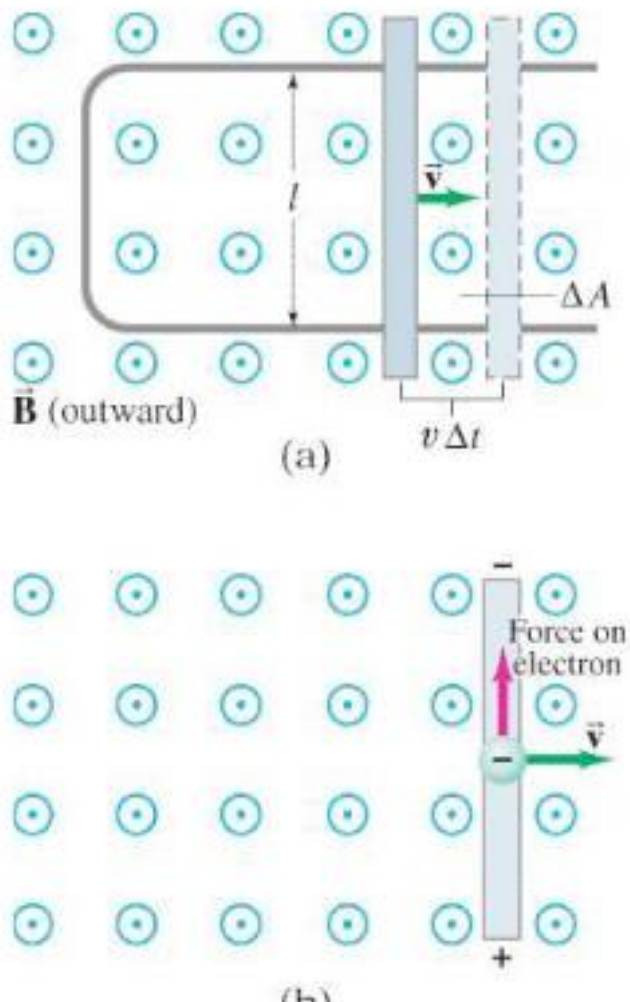
Η επαγόμενη σε ένα κύκλωμα ΗΕΔ ισουται με το αρνητικό του ρυθμού μεταβολής της μαγνητικής ροής που διαπερνά το κύκλωμα. Το αρνητικό πρόσημο εκφράζει τον νόμο του Lenz. Σύμφωνα με το νόμο του Lenz κάθε επαγωγικό φαινόμενο τείνει να αντιστεθεί στο φαινόμενο που το προκάλεσε. Αυτό είναι απόρροια της αρχής διατήρησης της ηλεκτρικής ενέργειας. **Ο νόμος του Lenz** ορίζει ότι :

**Η φορά οποιουδήποτε μαγνητικό φαινομένου επαγωγής είναι τέτοια ώστε να αντιστεθεί στο αίτιο που το προκάλεσε.**

Εάν το αίτιο είναι η κίνηση αγωγού μέσα σε μαγνητικό πεδίο τότε η φορά του επαγόμενου ρεύματος θα είναι τέτοια ώστε η αναπτυσσόμενη μαγνητική δύναμη να έχει κατεύθυνση αντίθετη της κίνησης του αγωγού. Εάν το αίτιο είναι η μεταβαλλόμενη ροή σε ακίνητο κύκλωμα το ρεύμα δημιουργεί το δικό του μαγνητικό πεδίο. Αυτό το πεδίο θα έχει αντίθετη κατεύθυνση από το αρχικό μαγνητικό πεδίο αν το αρχικό πεδίο αυξάνει και την ίδια κατεύθυνση αν το αρχικό πεδίο μειώνεται. Για να υπάρξει επαγόμενο ρεύμα, απαιτείται πλήρες κύκλωμα. Αν ένας αγωγός δεν σχηματίζει πλήρες κύκλωμα, τότε μπορούμε να το συμπληρώσουμε νοητά μεταξύ των άκρων του αγωγού και να χρησιμοποιήσουμε τον νόμο του Lenz για να καθορίσουμε τη φορά του ρεύματος. Τότε μπορούμε να βρούμε την πολικότητα στα άκρα του αγωγού που είναι ανοικτό κύκλωμα. Η κατεύθυνση από το αρνητικό (-) προς το θετικό (+) άκρο μέσα από τον αγωγό είναι η φορά που θα είχε το ρεύμα στην περίπτωση που έκλεινε το κύκλωμα.

## 4.2 Επαγόμενη ΗΕΔ λόγω κίνησης.

ΗΕΔ εξ επαγωγής μπορεί να προκληθεί λόγω της κίνησης ενός αγωγού μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Η διαδικασία παριστάνεται στο Σχήμα 4.4.



Σχήμα 4.4

Καθώς η ράβδος κινείται πάνω στον αγώγιμο δρόμο σχήματος  $U$  η επιφάνεια μεταβάλλεται άρα μεταβάλλεται και η μαγνητική ροή μέσα από την επιφάνεια. Μπορούμε να γράψουμε

$$E = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{BdA}{dt} = -\frac{Blvdt}{dt} = -Bvl \quad (4.3)$$

Το (-) στην σχέση 4.3 θα καθορίσει την πολικότητα της  $E$  σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz.

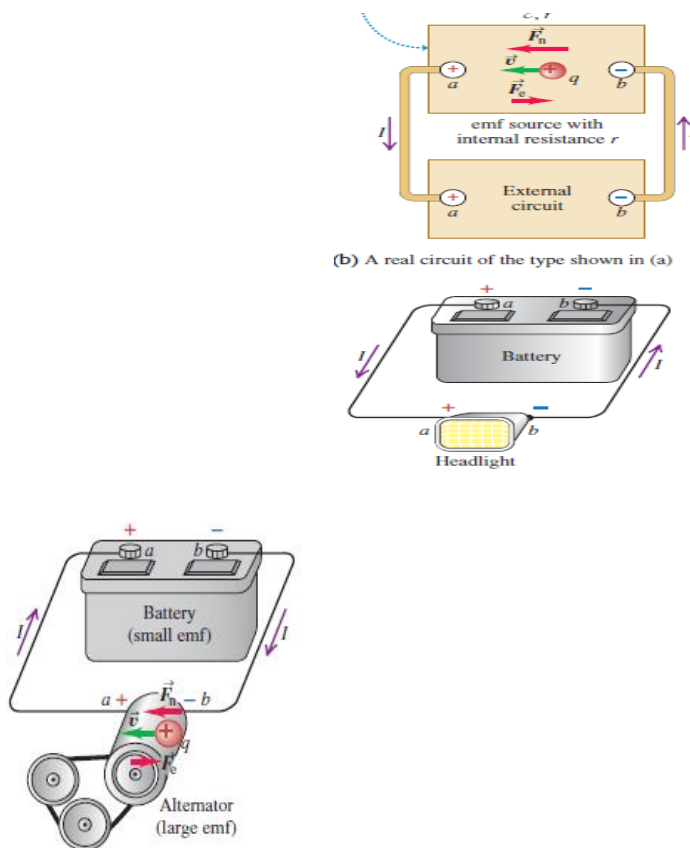


### 4.3 Επαγόμενη ANTI ΗΕΔ σε ηλεκτροκινητήρα

Κατά την λειτουργία του ο ηλεκτροκινητήρας παράγει αντι ΗΕΔ. Σε μία πηγή τάσης με εσωτερική αντίσταση  $r$  η διαφορά δυναμικού ή πολική τάση  $V_{ab}$  ΗΕΔ της πηγής δίνεται από την σχέση

$$V_{ab} = E - Ir \quad (4.4)$$

Όπου  $E$  είναι η ΗΕΔ της πηγής. Η διάταξη φαίνεται στο σχήμα 4.5



Σχήμα 4.5.

Η ισχύς που παρέχει η πηγή δίνεται από την σχέση

$$P = V_{ab} I = EI - Ir^2 \quad (4.5)$$

Σε ένα ηλεκτροκινητήρα ο ρότωρ περιστρεφόμενος μέσα στο μαγνητικό πεδίο δημιουργεί μεταβολή της μαγνητικής ροής που διέρχεται από της σπείρες του πηνίου με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί μία ANTI ΗΕΔ  $E$ . Ονομάζεται ANTI ΗΕΔ γιατί το

επαγωγικό ρεύμα που δημιουργεί σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz αντιτίθεται στο ρεύμα του κυκλώματος.

Για την πολική τάση ενός σειριακού ηλεκτροκινητήρα θα ισχύει

$$V_{ab}=E+Ir \quad (4.6)$$

Επειδή η ANTI ΗΕΔ  $E$  είναι ανάλογη της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής  $\omega$  έπεται ότι αυτή δεν είναι σταθερή.

### Άσκηση 4.1

Ένας ηλεκτροκινητήρας συνεχούς ρεύματος έχει  $r=4\Omega$ . Όταν λειτουργεί με πλήρες φορτίο σε μία γραμμή 220V τραβάει ρεύμα 4A. α) Ποια η ΗΕΔ του κινητήρα β) Πόση ισχύ παρέχεται στον κινητήρα γ) Ποιος είναι ο ρυθμός κατανάλωσης ενέργειας στην αντίσταση του κινητήρα; δ) Πόση είναι η μηχανική ισχύς ε) Ποια είναι η απόδοση του κινητήρα; στ) τι θα συμβεί αν λόγω εμπλοκής ο κινητήρας σταματήσει να λειτουργεί;

α)  $V_{ab}=E +Ir$ .

Έχουμε

$$220V=E+16A\Omega \rightarrow E=204V$$

β) Η ισχύς εισόδου  $P$  από την πηγή είναι

$$P=V_{ab}I=220V4A=880W.$$

γ) Η ισχύς  $P'$  που καταναλίσκεται στην αντίσταση  $r$  είναι

$$P'=I^2r=(4A)^2(4\Omega)=64W$$

$$\delta) P_{\mu}=880W-64W=816W$$

$$\epsilon) e = \frac{816W}{880W} 100 = 93\%$$

στ) Στην περίπτωση αυτή επειδή  $\omega=0$  η  $E=0$ . Τότε

$$I = \frac{V_{ab}}{r} = \frac{220V}{4\Omega}=55A$$

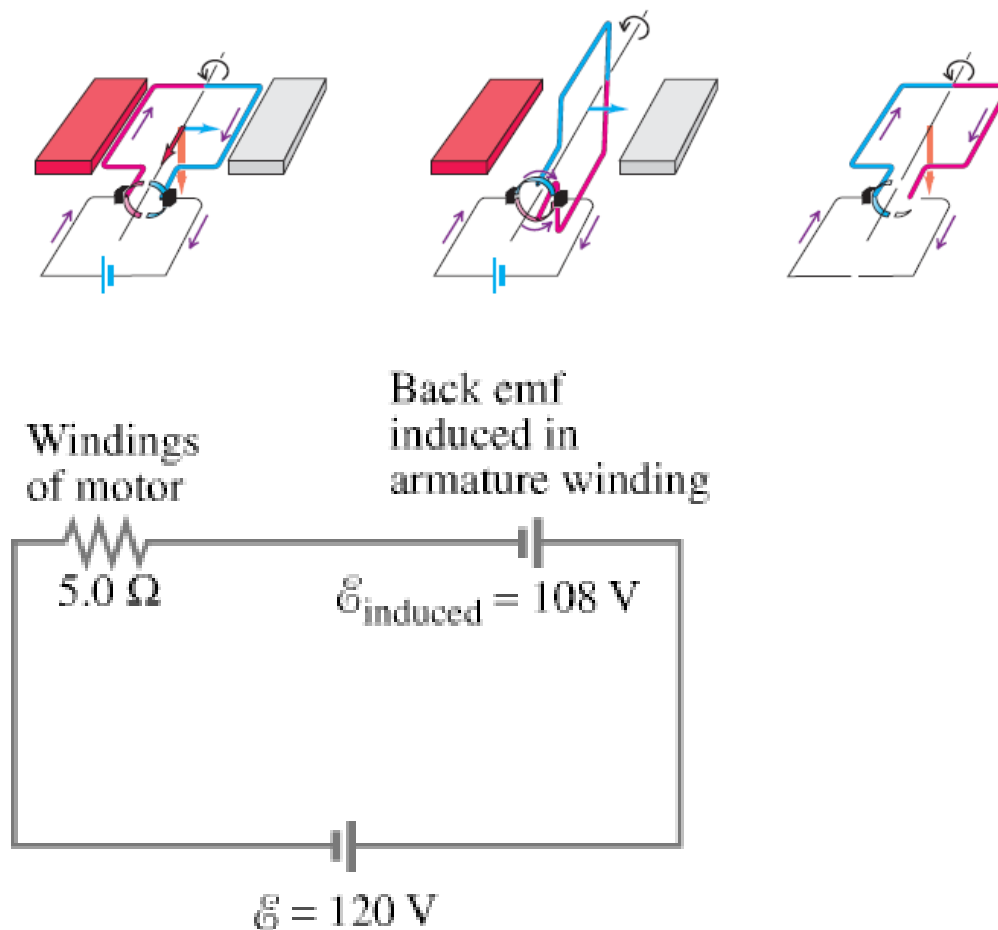
Και η καταναλισκόμενη ισχύς  $P$

$$P=I^2r=(55A)^2 4\Omega=12100W$$

Αυτή είναι μία τεράστια υπερφόρτωση. Όταν ο κινητήρας τίθεται σε λειτουργία υπάρχει μία ξαφνική αύξηση του ρεύματος μέχρι να αποκτήσει σταθερή ταχύτητα.

**Άσκηση 4.2**

Να βρεθεί το ρεύμα εκίνησης και το ρεύμα κόρου στον κινητήρα του Σχήματος 4.7 όταν η ΗΕΔ είναι  $E=120\text{V}$ , ΑΝΤΙ ΗΕΔ είναι  $E_{ind}=108\text{V}$  και η εσωτερική αντίσταση  $r=5\Omega$ .



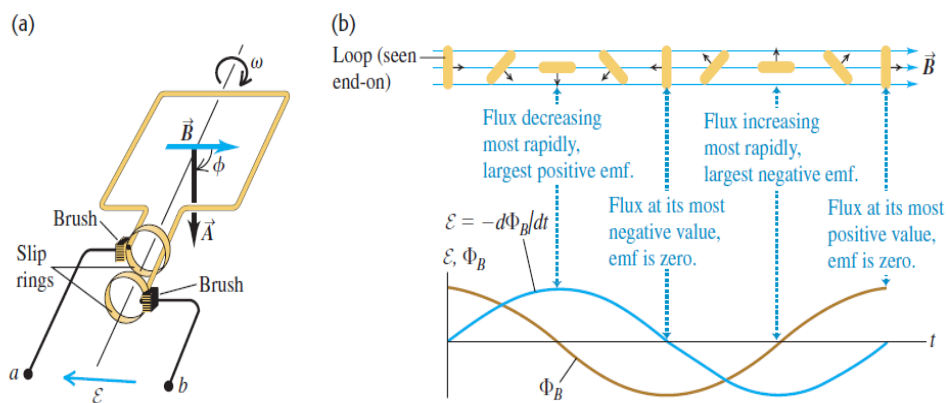
Σχήμα 4.7

$$\alpha) I = \frac{E}{r} = \frac{120\text{V}}{5\Omega} = 24\text{A}$$

$$\beta) I = \frac{E - E_{ind}}{r} = \frac{120\text{V} - 108\text{V}}{5\Omega} = 2,4\text{A}$$

**4.4 Ηλεκτρική γεννήτρια – Δυναμό**

Εάν ένα κλειστός αγωγίμος βρόχος περιστραφεί μέσα σε μαγνητικό πεδίο τότε λόγω της μεταβολής της μαγνητικής ροής δημιουργείται ΗΕΔ εξ επαγωγής (Σχήμα 4.8)



Σχήμα 4.8

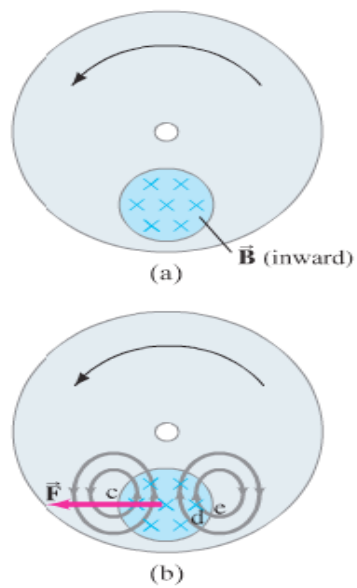
Η ΗΕΔ εξ επαγωγής δίνεται από την σχέση

$$E = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(BA\cos(\omega t)) = \omega BA\sin(\omega t) \quad (4.7)$$

Κατά την λειτουργία της γεννήτριας δημιουργείται μηχανική αντι ροπή. Στην πραγματικότητα σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz πρέπει να δημιουργηθεί ένας μηχανισμός που θα αντιτίθεται στην μεταβολή της μαγνητικής ροής μέσα από το πλαίσιο. Εάν η γεννήτρια είναι συνδεδεμένη με φορτίο τότε το κύκλωμα είναι κλειστό και διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα. Το ηλεκτρικό ρεύμα δημιουργεί ένα μαγνητικό πεδίο. Έχουμε δηλαδή ένα ρευματοφόρο πλαίσιο μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Το πλαίσιο δέχεται μηχανική αντι ροπή.

#### 4.5 Δινορεύματα – Eddy currents

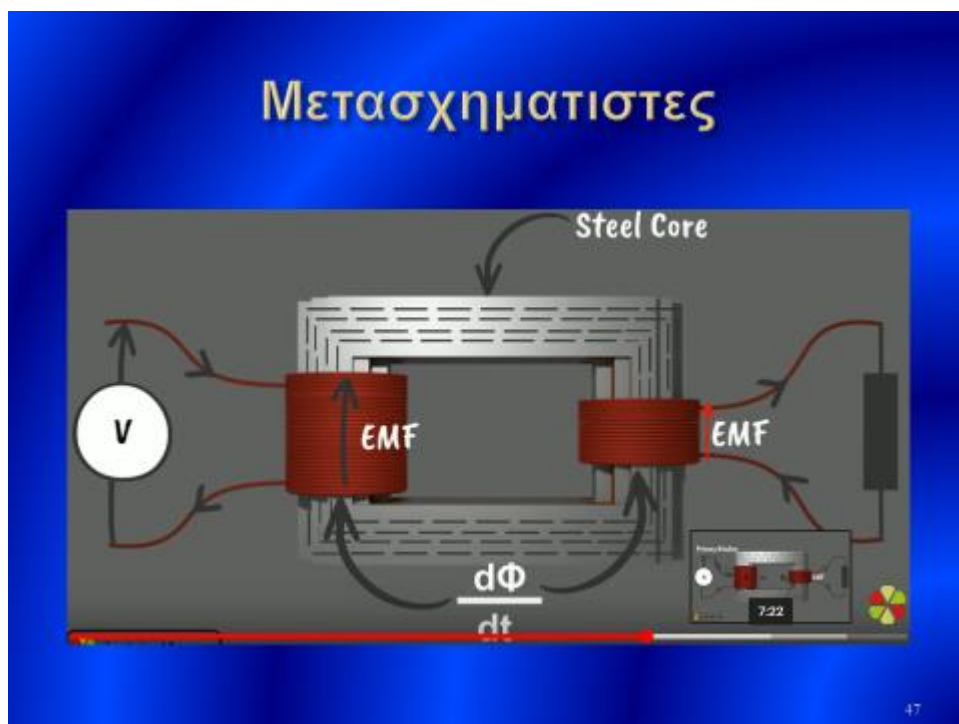
Σε κομμάτια μετάλλου που κινούνται μέσα σε μαγνητικά πεδία ή βρίσκονται μέσα σε μεταβαλλόμενα μαγνητικά πεδία δημιουργούνται επαγωγικά ρεύματα μέσα στον όγκο του υλικού (Σχήμα 4.9). Επειδή οι εικόνες τους παραπέμπουν σε δίνες ονομάζονται δινορεύματα. Στον σιδηροπυρήνα ενός μετασχηματιστή εναλλασσόμενου ρεύματος δημιουργούνται ανεπιθύμητα δινορεύματα διότι παράγουν θερμότητα λόγω φαινομένου Joule. Τα δινορεύματα που δημιουργούνται σε πραγματικούς μετασχηματιστές περιορίζονται σημαντικά με τη χρήση φυλλωτού πυρήνα, δηλαδή ενός σιδηροπυρήνα που αποτελείται από λεπτά φύλλα. Τα δινορεύματα έχουν πολλές πρακτικές χρήσεις όπως είναι η πέδηση λόγω δινορευμάτων σε ζυγούς, σε περιστρεφόμενες μηχανές και στα γρήγορα τρένα. Δινορεύματα προκαλούν την περιστροφή του μεταλλικού δίσκου στους μετρητές κατανάλωσης ηλεκτρικής ενέργειας (της ΔΕΗ) που υπάρχουν στα σπίτια. Τα ρεύματα αυτά επάγονται στον δίσκο από τα μαγνητικά πεδία που προκαλούν τα ημιτονοειδώς μεταβαλλόμενα ρεύματα σε ένα πηνίο. Στους φούρνους επαγωγής, τα δινορεύματα χρησιμοποιούνται για να θερμάνουν υλικά σε πλήρως σφραγισμένα δοχεία για χρήσεις στις οποίες είναι απαραίτητο να αποφευχθεί έστω και η ελάχιστη μόλυνση των υλικών. Τέλος, οι γνώριμοι μεταλλικοί λειτουργούν ανιχνεύοντας δινορεύματα που επάγονται σε μεταλλικά αντικείμενα.



Σχήμα 4.9

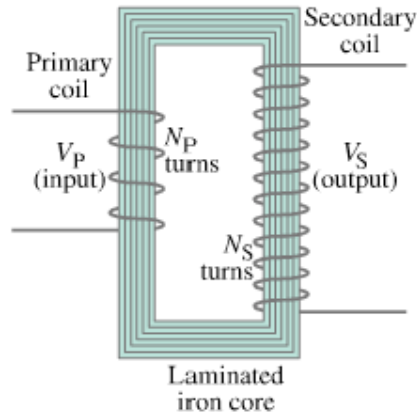
#### 4.6 Μετασχηματιστές.

Στους μετασχηματιστές εκμεταλλευόμαστε το φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής για την ανύψωση ή τον υποβιβασμό της τάσης. Η λειτουργία ενός μετασχηματιστή παριστάνεται στο Σχήμα 4.10.



Σχήμα 4.10

Εάν θεωρήσουμε ότι το πρωτεύον πηνίο έχει  $N_p$  σπείρες και το δευτερεύον  $N_s$  σπείρες (Σχήμα 4.11) και η ΗΕΔ για το πρωτεύον είναι  $E_p$  και  $E_s$  για το δευτερεύον τότε



Σχήμα 4.11

Εάν δεν υπάρχει φορτίο θα ισχύει  $E_p = V_p$  και  $E_s = V_s$  όπου  $V_p$  και  $V_s$  οι διαφορές δυναμικού στο πρωτεύον και το δευτερεύον αντίστοιχα. Τότε θα έχουμε

$$E_s = V_s = -N_s \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (4.8)$$

$$E_p = V_p = -N_p \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (4.9)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (4.8) και (4.9) προκύπτει

$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s}{N_p} \quad (4.10)$$

Δηλαδή ο λόγος των τάσεων είναι ανάλογος του λόγου των σπειρών. Επίσης θα ισχύει

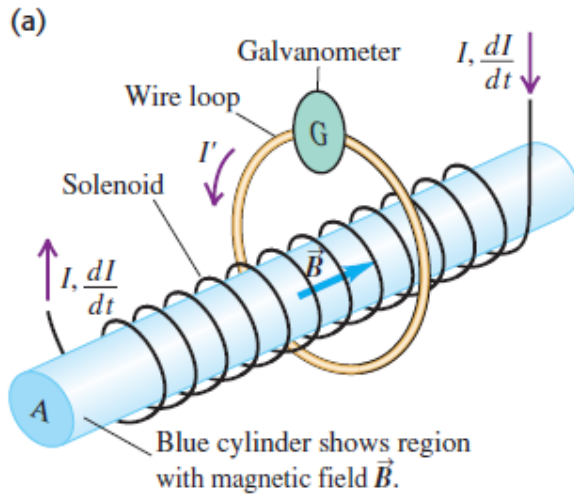
$$P = V_s I_s = V_p I_p \quad (4.11)$$

Από (4.10) και (4.11) προκύπτει η

$$\frac{I_s}{I_p} = \frac{N_p}{N_s} \quad (4.12)$$

#### 4.7. Επαγόμενα Ηλεκτρικά πεδία.

Το σχήμα 4.12 περιλαμβάνει ένα πηνίο που διαρρέεται από ρεύμα  $I$  που μεταβάλλεται.



Σχήμα 4.12

Το ρεύμα αυτό δημιουργεί ένα μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο και συνεπώς προκαλείται μια μεταβολή της μαγνητικής ροής μέσα στο σωληνοειδές πηνίο. Όσο διαρκεί αυτή η μεταβολή το γαλβανόμετρο μετρά ένα ηλεκτρικό ρεύμα  $I'$  στον αγωγικό βρόχο. Το ρεύμα στον βρόχο δεν προέρχεται από μία μαγνητική δύναμη γιατί δεν επηρεάζεται από το μαγνητικό πεδίο  $B$ . Τα ηλεκτρόνια στον βρόχο δέχονται μία μη ηλεκτροστατική ηλεκτρική δύναμη από ένα μη ηλεκτροστατικό πεδίο δηλαδή από ένα επαγόμενο Ηλεκτρικό πεδίο. Η μεταβολή της μαγνητικής ροής στον βρόχο δημιουργεί ένα επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο. Το έργο για μία πλήρη περιστροφή στον βρόχο

$$W_{a \rightarrow a} = \oint F dl = \oint q E dl \longrightarrow \frac{W_{a \rightarrow a}}{q} = \oint E dl \quad (4.13)$$

απο την σχέση  $E = -\frac{dV}{dl} \rightarrow dV = -E dl$  και με ολοκλήρωση έχουμε  $\int_a^b dV = -\int_a^b E dl$ .  
Τελικά

$$V_b - V_a = -\int_a^b E dl. \text{ Ισοδύναμα έχουμε } E = V_{ab} = \int_a^b E dl.$$

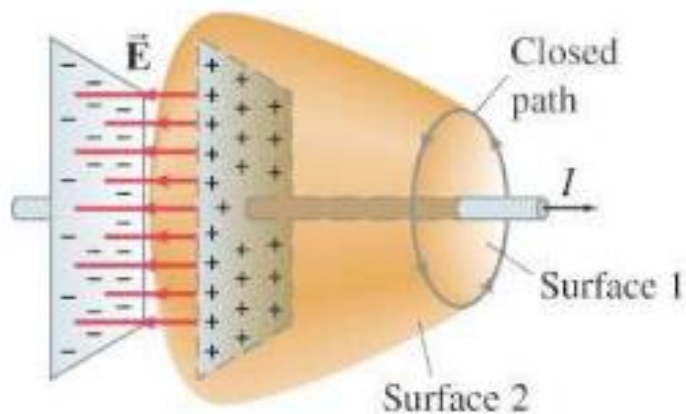
Όμως ισχύει  $E = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ . Έτσι προκύπτει η

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (4.14)$$

**Αυτά τα επαγόμενα ηλεκτρικά πεδία είναι μη συντηρητικά.**

#### 4.8. Γενικευμένος νόμος του Ampere.

Ο νόμος του Ampere ορίζει ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του μαγνητικού πεδίου κατά μήκος μιας καμπύλης ισούται με το ρεύμα που διέρχεται από την επιφάνεια που ορίζεται από την κλειστή καμπύλη. Η επιφάνεια δεν είναι κατ' ανάγκη επίπεδη



Σχήμα 4.13

Στο Σχήμα 4.13 παριστάνεται η διαδικασία φόρτισης ενός πυκνωτή.

Ο νόμος του Ampere για την επίπεδη επιφάνεια -1 που οριοθετείτε από τον κύκλο δίνει ότι  $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$  ενώ για την επιφάνεια -2 ο νόμος του Ampere δίνει  $\oint \vec{B} d\vec{l} = 0$  καθώς ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή δεν υπάρχει ρεύμα αγωγιμότητας. Για να αντιμετωπισθεί η αντίφαση αυτή επινοούμε ένα υποθετικό ρεύμα ή ψευδόρευμα

στον χώρο ανάμεσα στις πλάκες, που ορίζεται ως **ρεύμα μετατόπισης**

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (4.15)$$

Το ρεύμα μετατόπισης είναι προϊόν της μεταβολής της ροής του ηλεκτρικού πεδίου. Έτσι ο γενικευμένος νόμος του Ampere γράφεται ως

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I_C + I_D) \quad (4.16)$$

Από (4.15) και (4.16) προκύπτει

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \left( I_C + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right) \quad (4.17)$$

Όπου  $I_C$  είναι το **ρεύμα αγωγιμότητας**.

#### 4.9. Εξισώσεις του Maxwell.

Συνοψίζοντας οι εξισώσεις που περιγράφουν τα φαινόμενα του Ηλεκτρισμού και του Μαγνητισμού διατυπώθηκαν από τον Maxwell



1. Ο νόμος του Gauss για τον Ηλεκτρισμό

$$\oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q_{encl}}{\epsilon_0} \quad (4.18)$$

Από τον νόμο του Gauss προκύπτει ο νόμος του Coulomb για τον Ηλεκτρισμό.

2. Ο νόμος του Gauss για τον Μαγνητισμό

$$\oint \vec{B} d\vec{A} = 0 \quad (4.19)$$

Ο μηδενισμός του δεύτερου μέλους προκύπτει από ότι δεν έχουν ανακαλυφθεί τα μαγνητικά μονόπολα.

3. Ο νόμος του Ampere

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \left( I_C + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)_{encl} \quad (4.20)$$

Η μεταβολή του ηλεκτρικού πεδίου δημιουργεί Μαγνητικό πεδίο

4. Ο νόμος του Faraday

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (4.21)$$

Η μεταβολή του Μαγνητικού πεδίου δημιουργεί ένα μη Ηλεκτροστατικό Ηλεκτρικό πεδίο μη συντηρητικό.

Στις εξισώσεις του Maxwell το ηλεκτρικό πεδίο συνίσταται από δύο όρους. Ένα Ηλεκτροστατικό πεδίο  $E_e$  και ένα μη ηλεκτροστατικό επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο  $E_n$ , έτσι ώστε

$$\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_n \quad (4.22)$$

**Στον νόμο του Gauss για τον ηλεκτρισμό τα Ηλεκτρικά πεδία προέρχονται φορτία έτσι έχουμε  $\vec{E} = \vec{E}_e$ . Στον νόμο του Faraday δεν υπάρχουν φορτία οπότε ισχύει  $\vec{E} = \vec{E}_n$  έχουμε δηλαδή μόνο επαγόμενα Ηλεκτρικά πεδία.**

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

### ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

Όπως προκύπτει από τις εξισώσεις του Maxwell ένα μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο παράγει μαγνητικό πεδίο και ένα μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο παράγει με την σειρά του ένα ηλεκτρικό πεδίο. Επομένως η χρονική μεταβολή του ενός επάγει στο χώρο πεδίο του άλλου είδους. Έτσι με το τρόπο αυτό μπορεί να διαδοθεί στο κενό μία Ηλεκτρομαγνητική διαταραχή δηλαδή ένα Ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Το 1887, ο Heinrich Hertz παρήγαγε στο εργαστήριο, για πρώτη φορά, ηλεκτρομαγνητικά κύματα με μακροσκοπικά μήκη κύματος. Για τον λόγο αυτό, χρησιμοποίησε ταλαντώνμενα κυκλώματα Tomson L-C. Για την ανίχνευση των κυμάτων χρησιμοποίησε άλλα κυκλώματα, συντονισμένα στην ίδια συχνότητα. Ο Hertz δημιούργησε επίσης ηλεκτρομαγνητικά στάσιμα κύματα και μέτρησε την απόσταση μεταξύ διαδοχικών δεσμών (μισό μήκος κύματος) προκειμένου να καθορίσει το μήκος κύματος. Εφόσον γνώριζε τη συχνότητα, βρήκε την ταχύτητα των κυμάτων από την σχέση

$$u = \lambda f \quad (5.1)$$

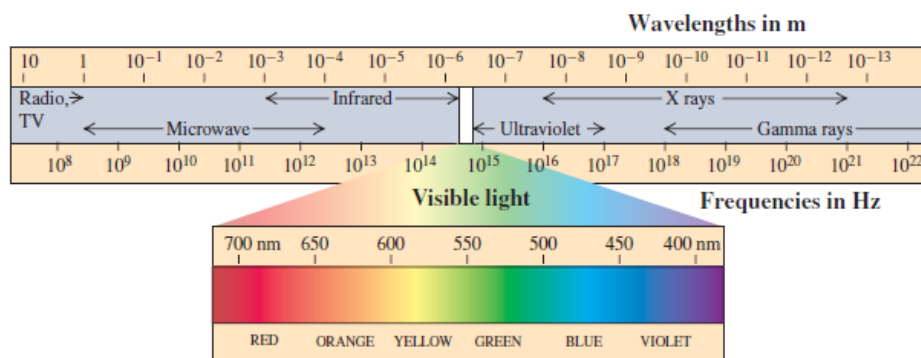
**Η ταχύτητα διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο κενό βρέθηκε ίδια με την ταχύτητα διάδοσης του φωτός στο κενό όπως είχε προβλεφθεί θεωρητικά από τις εξισώσεις του Maxwell που έβρισκαν θεωρητικά την ταχύτητα του φωτός  $c$  από την σχέση**

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (5.2)$$

Η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία παράγεται πάντα από ένα επιταχυνόμενο ηλεκτρικό φορτίο.

#### 5.1 Το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα

Στο Σχήμα 5.1 παριστάνεται η κατανομή της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας στα διάφορα μήκη κύματος ή τις διάφορες συχνότητες δηλαδή το Ηλεκτρομαγνητικό φάσμα. Η ενέργεια αυξάνει προς τα δεξιά.



Σχήμα 5.1 Το Ηλεκτρομαγνητικό φάσμα

Ενώ στον Πίνακα Ι φαίνεται η ονομασία, το μήκος κύματος ο τρόπος παραγωγής και ανίχνευσης της Ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας καθώς και οι χρήσεις της.

## ΠΙΝΑΚΑΣ Ι

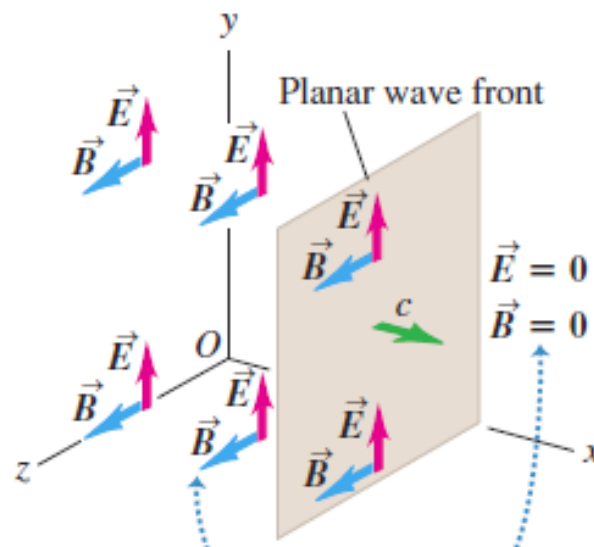
Ονομασία	Μήκος κύματος	Πώς παράγονται	Πώς ανιχνεύονται	Χρήσεις
<b>Ραδιοκύματα</b>	Από $10^3$ m έως μερικά εκατοστά περίπου	Από ηλεκτρονικά κυκλώματα, όπως το κύκλωμα LC	Με κεραίες ραδιοφώνου, τηλεόρασης κ.λπ.	Ραδιοφωνία, τηλεόραση, τηλεφωνία κ.λπ.
<b>Μικροκύματα</b>	Από 30 cm έως 1 mm περίπου	Από ηλεκτρονικά κυκλώματα	Με ραντάρ	Φούρνοι μικροκυμάτων, ραδιοαστρονομία, ραντάρ
<b>Υπέρυθρη ακτινοβολία</b>	Από 1 mm έως $7 \cdot 10^{-7}$ m (700 nm) περίπου	Εκπέμπεται από θερμά σώματα	Με φωτογραφικά φιλμ, με θέρμανση του δέρματος κ.λπ.	Ειδικές φωτογραφίες τη νύχτα ή μέσα στα σύννεφα
<b>Ορατή ακτινοβολία</b>	Από 400 nm έως 700 nm περίπου	Από τις αποδιεγέρσεις των ατόμων	Από το ανθρώπινο μάτι, φωτοκύτταρα, φωτογραφικά φιλμ κ.λπ.	Όραση, φωτοσύνθεση, οπτικές ίνες, φασματοσκοπία κ.λπ.
<b>Υπεριώδης ακτινοβολία</b>	Από 400 nm έως $6 \cdot 10^{-8}$ m περίπου	Από τον Ήλιο και από τις αποδιεγέρσεις ορισμένων ατόμων	Με φωτογραφικά φιλμ και φωτοκύτταρα	Αισθητική Ιατρική, αποστείρωση ιατρικών εργαλείων κ.λπ.
<b>Ακτίνες X (ή ακτίνες Roentgen)</b>	Από $10^{-8}$ m έως $10^{-13}$ m περίπου	Από την επιβράδυνση ταχέως κινούμενων ηλεκτρονίων καθώς προσκρούουν σε μεταλλικό στόχο	Με φωτογραφικά φιλμ	Στην Ιατρική για διαγνωστικούς σκοπούς και στη μελέτη της δομής των κρυστάλλων

## 5.2 Επίπεδο κύμα

Για να ικανοποιηθούν οι εξισώσεις του Maxwell τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα πρέπει να έχουν τα ακόλουθα χαρακτηριστικά

1. Το κύμα είναι εγκάρσιο. Το  $E$  και το  $B$  είναι κάθετα στην κατεύθυνση διάδοσης του κύματος και επίσης κάθετα μεταξύ τους. Η κατεύθυνση διάδοσης είναι η κατεύθυνση του διανυσματικού γινομένου  $\vec{E} \times \vec{B}$
2. Ο λόγος των μέτρων του  $E$  και του  $B$  είναι καθορισμένος και ίσος με την ταχύτητα του φωτός στο κενό  $E=cB$
3. Το κύμα διαδίδεται στο κενό με μια ορισμένη και σταθερή ταχύτητα  $c$

Το πιο απλό και στοιχειώδες ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι το επίπεδο κύμα που απεικονίζεται στο Σχήμα 5.2.

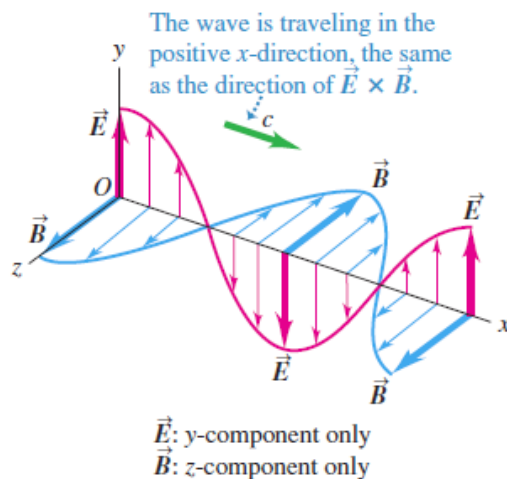


Σχήμα 5.2

Αυτό δημιουργείται από ηλεκτρικό πεδίο μόνο με συνιστώσα  $y$  και ένα μαγνητικό πεδίο μόνο με συνιστώσα  $z$ . Τα δύο πεδία κινούνται μαζί στην κατεύθυνση  $+x$  με ταχύτητα  $c$  και βρίσκονται σε φάση. Τα πεδία  $E$  και  $B$  είναι ομογενή στην περιοχή που βρίσκεται αριστερά του επιπέδου αλλά είναι μηδέν οπουδήποτε δεξιά του. Το επίπεδο απεικονίζει το μέτωπο κύματος που κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα  $c$ .

### 5.2 Γραμμικά πολωμένο επίπεδο Ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

Για χάριν απλότητας θεωρούμε ότι οι εξαρτήσεις των  $E$  και  $B$  σε κάθε σημείο του χώρου είναι ημιτονοειδής συναρτήσεις του χρόνου. Επίσης σε κάθε χρονική στιγμή η χωρική τους μεταβολή είναι ημιτονοειδής. Τα πεδία σε κάθε χρονική στιγμή είναι ομογενή πάνω σε οποιοδήποτε επίπεδο κάθετο στην κατεύθυνση και δεν αλλάζουν θέση, επίσης έχουν μετατοπίσεις μόνο κατά μήκος της διεύθυνσης  $y$  και  $z$  για το Ηλεκτρικό και Μαγνητικό πεδίο αντίστοιχα είναι δηλαδή **γραμμικά πολωμένα**. Τέτοια κύματα παριστάνονται στο Σχήμα 5.3



Σχήμα 5.3

Και περιγράφονται από τις εξισώσεις

$$\vec{E}(y, t) = E_{max} \cos(\omega t - kx) \vec{j} \quad (5.3)$$

$$\vec{B}(y, t) = B_{max} \cos(\omega t - kx) \vec{k} \quad (5.4)$$

Όπου  $\omega$  είναι η γωνιακή ταχύτητα ή κυκλική συχνότητα

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (5.5)$$

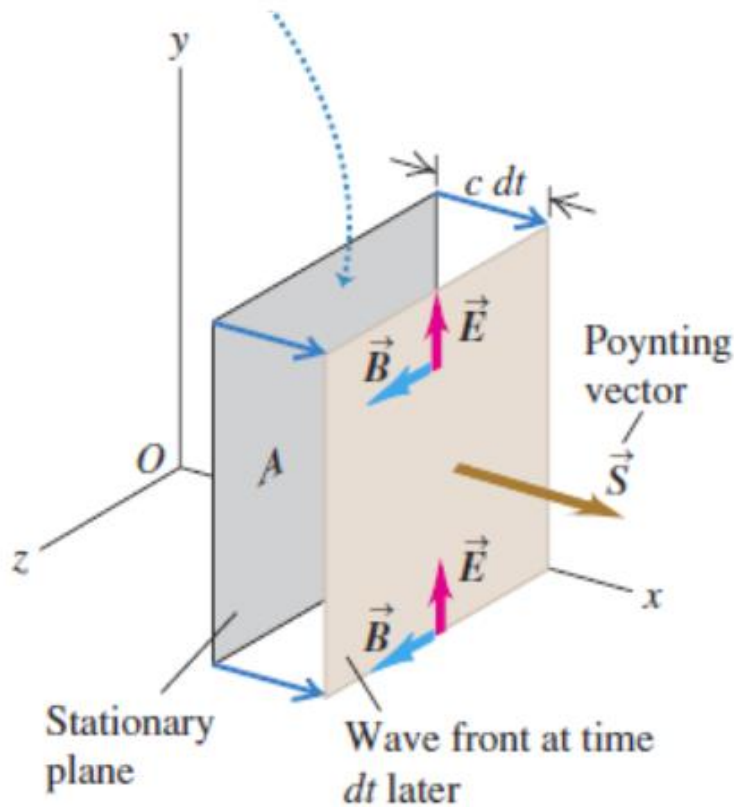
Και  $T, f$  είναι η περίοδος και η συχνότητα του ηλεκτρομαγνητικού κύματος,

Ενώ  $k$  είναι ο κυματάριθμος

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (5.6)$$

### 5.3 Το διάνυσμα Poynting

Το διάνυσμα Poynting  $\vec{S}$  περιγράφει την ηλεκτρομαγνητική ισχύ ανά επιφάνεια σε μονάδες  $\left(\frac{W}{m^2}\right)$  παριστάνεται στο Σχήμα 5.4



Σχήμα 5.4

Το διάνυσμα Poynting ορίζεται από την σχέση,

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (5.7)$$

Ισχύει

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} E_{max} \cos(\omega t - kx) B_{max} \cos(\omega t - kx) \hat{j} \times \hat{k} = \frac{1}{\mu_0} E_{max} B_{max} \cos^2(\omega t - kx) \hat{i} = c^2 \epsilon_0 E_{max} B_{max} \cos^2(\omega t - kx) \hat{i} \quad (5.8)$$

Επειδή στις οπτικές συχνότητες τα μεγέθη E, B ταλαντώνονται με εξαιρετικά υψηλές συχνότητες είναι αδύνατο να μετρήσουμε στιγμιαίες τιμές του S. Για αυτό προσδιορίζουμε την μέση τιμή του S κατά την διάρκεια ενός καταλλήλου χρονικού διαστήματος. Η μέση τιμή του S ταυτίζεται με το μέγεθος **ένταση ακτινοβολίας**  $J_e$ . Η ένταση ακτινοβολίας ορίζεται ως

$$J_e = \frac{d\Phi_e}{dA} \quad (5.9)$$

Όπου,

$$d\Phi_e = \frac{dE_e}{dt} \quad (5.10)$$

Είναι η ροή ακτινοβολίας ή ενεργειακή ροή σε (W) και

$E_e$  είναι η ενέργεια ακτινοβολίας.

Για την μέση τιμή του διανύσματος Poynting ισχύει

$$S_{av} = J_e = \frac{c\epsilon_0 E_{max}^2}{2} \quad (5.10)$$

Η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία ή ισοδύναμα το φωτόνιο μεταφέρει ορμή όπως και στροφορμή. Η ορμή  $p$  δίνεται από την σχέση

$$\vec{p} = \frac{\vec{S}}{c^2} \quad (5.11)$$

Η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία επίσης ασκεί πίεση σε μία επιφάνεια. Όταν η επιφάνεια απορροφά την ακτινοβολία τότε η πίεση  $p_{rad}$  δίνεται από την σχέση,

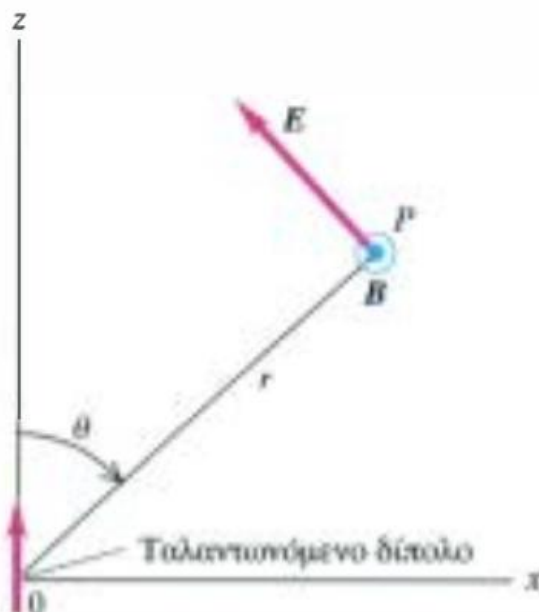
$$p_{rad} = \frac{S_{av}}{c} \quad (5.12)$$

Ενώ όταν η επιφάνεια είναι ανακλαστική δίνεται από την σχέση

$$p_{rad} = \frac{2S_{av}}{c} \quad (5.13)$$

#### 5.4 Ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία από κεραία.

Ένα ταλαντούμενο ηλεκτρικό δίπολο παράγει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Η μορφή του πεδίου ακτινοβολίας είναι αρκετά πολύπλοκη. Όμως σε σημεία απομακρυσμένα από το δίπολο, σχετικά με τις διαστάσεις του διπόλου η μορφή του πεδίου απλουστεύεται. Το αντίστοιχο ηλεκτρομαγνητικό κύμα δεν είναι επίπεδο αλλά σφαιρικό. Στο Σχήμα 5.5 παριστάνεται το ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται από ένα ταλαντούμενο ηλεκτρικό πεδίο.



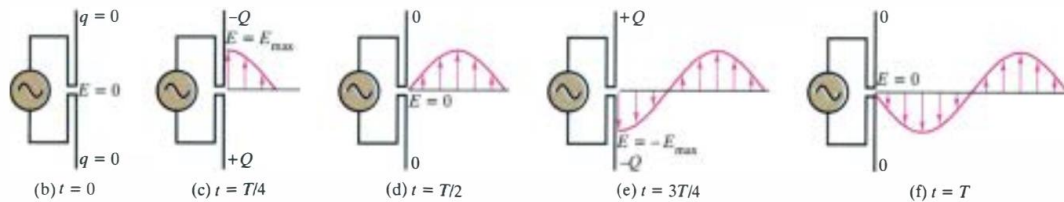
Σχήμα 5.5

Τα πεδία  $E, B$  σε ένα σημείο του χώρου με σφαιρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \phi)$  δίνονται από τις σχέσεις,

$$E = \frac{pk^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin\theta}{r} \sin(\omega t - kr) \quad (5.14)$$

$$B = \frac{pk^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin\theta}{r} \sin(\omega t - kr) \quad (5.15)$$

Το Σχήμα 5.6 παριστάνει ένα στιγμιότυπο μιας μεσημβρινής διατομής. Το  $E$  βρίσκεται πάνω στο επίπεδο της τομής ενώ το  $B$  είναι κάθετο. Και τα δύο πεδία είναι κάθετα προς την ακτινική κατεύθυνση. Οι μέγιστες τιμές των  $E$  και  $B$  παίρνουν τις μέγιστες τιμές τους για  $\theta = \pi/2$  δηλαδή σε διευθύνσεις κάθετες στο δίπολο, ενώ για  $\theta = 0$  δηλαδή κατά μήκος του άξονα του διπόλου τα  $E, B$  μηδενίζονται. Στο Σχήμα 5.6 παριστάνεται η λειτουργία του διπόλου σε μία περίοδο.



Σχήμα 5.6

Από τις σχέσεις (5.10) και (5.14) προκύπτει ότι το η μέση τιμή του διανύσματος Poynting δηλαδή η ένταση ακτινοβολίας είναι ανάλογη του  $1/r^2$  και ανάλογη του  $\sin^2\theta$ .